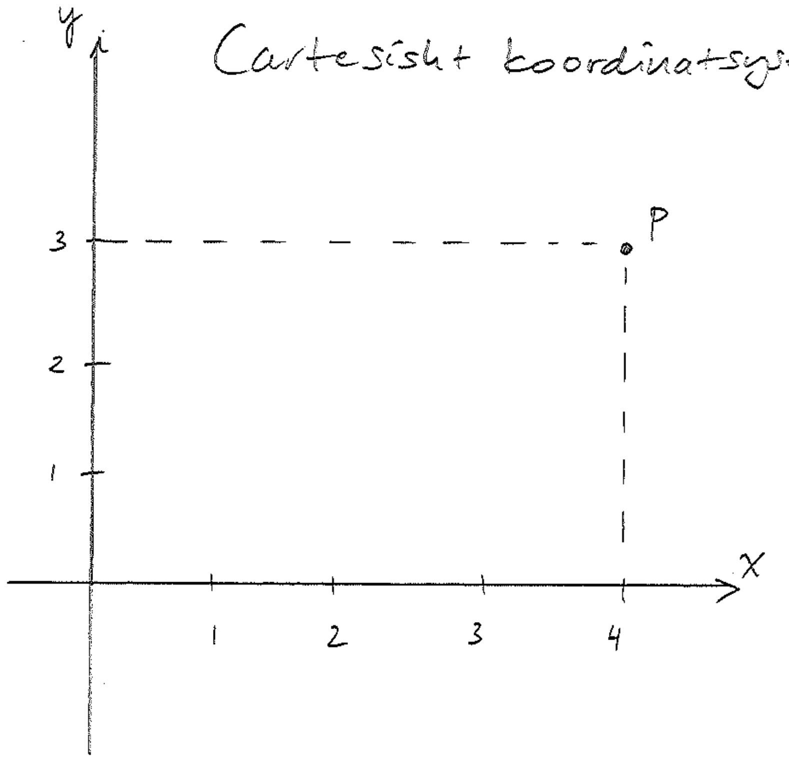
* **Idag:** Analytisk geometri

$\boxed{\text{I 03}}$ (RP kap 3)

---

* Koordinater

Cartesiskt koordinatsystem



p har koordinaterna $x = 4$, $y = 3$

x och y är koordinater (koordinatfunktioner) för punkten p:

$$\begin{cases} x(p) = 4 \\ y(p) = 3 \end{cases}$$

reella talen

$$\begin{cases} x : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{R} \\ y : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{R} \end{cases}$$

euklidiska planet

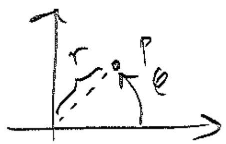
par av reella tal

$$(x, y) : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{R}^2$$

Normalt tänker vi $\mathbb{E}^2 = \mathbb{R}^2$ och skriver

$$p = (x, y)$$

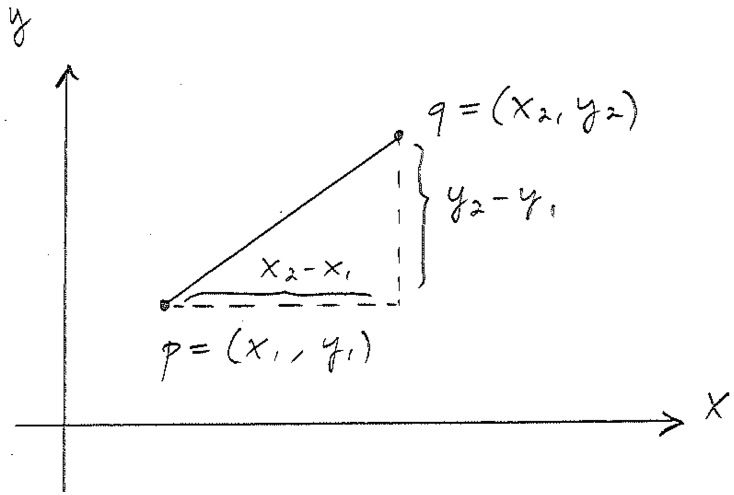
Notera: Koordinater behöver ej vara Cartesiska



$$\begin{cases} r = r(p) \\ \varphi = \varphi(p) \end{cases}$$ Polära koordinater

* **Definition:** Avstånd

$d(p,q)$ = avstånd mellan punkterna p och q



Pythagoras sats ger:

$$\boxed{d(p,q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}$$

Viktigt specialfall: $q = (0,0)$ (origo)

$$|p| = d(p, (0,0)) = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

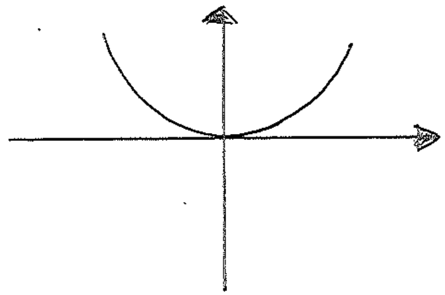
* **Definition:** Graf

Givet en ekvation i x och y är grafen till ekvationen mängden av de punkter (x,y) som uppfyller ekvationen.

Exempel:

(i) $y - x^2 = 0$

$\Leftrightarrow y = x^2$



(ii)

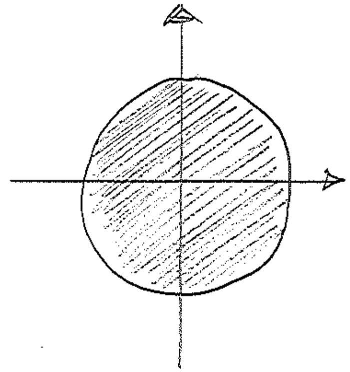
$x^2 + y^2 = 1$ (sluten)

$x^2 + y^2 \leq 1$ (sluten)

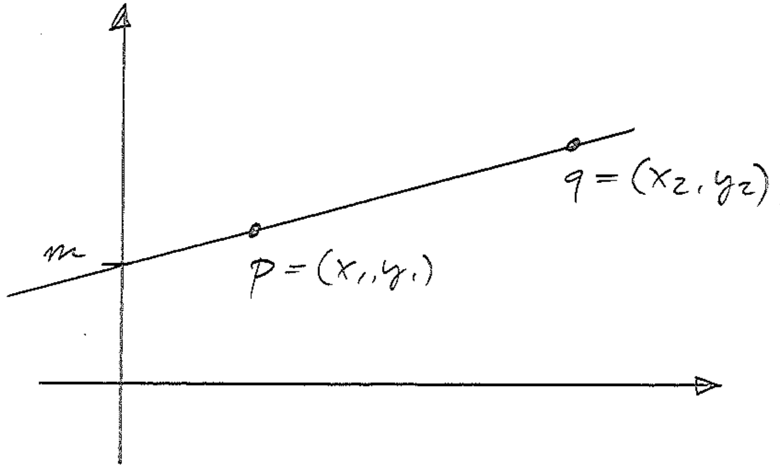
$x^2 + y^2 < 1$ (öppen)

$x^2 + y^2 \geq 1$ (sluten)

$x^2 + y^2 > 1$ (öppen)



* Räta linjen



Standardform: $\boxed{y = kx + m}$

k = riktningskoefficient

(Notera: Adams/Essex använder m!)

Bestäm k och m från p och q.

$$\begin{cases} y_1 = kx_1 + m \\ y_2 = kx_2 + m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y_1 - y_2 = kx_1 + \cancel{m} - (kx_2 + \cancel{m}) = k(x_1 - x_2)$$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\Rightarrow \quad m = y_1 - kx_1 = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1$$

$$\therefore \quad y = \underbrace{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}_{k} \cdot x + \underbrace{y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}_{m}$$

Behöver ej memoreras!
(Kan härledas vid behov)

Övning: Visa att linjen mellan punkterna $p = (x_1, y_1)$ och $q = (x_2, y_2)$ kan skrivas

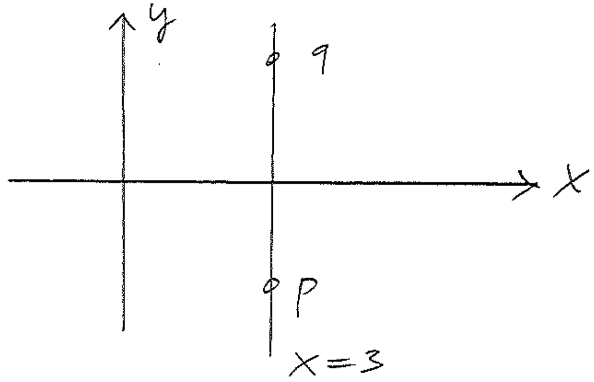
$$\boxed{y = y_1 \lambda_1(x) + y_2 \lambda_2(x)}$$

där $\lambda_1(x) = \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$, $\lambda_2(x) = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

Tolka formeln!

Notera: Standardformen bryter ihop då $x_1 = x_2$

$\therefore$ Kan ej beskriva linjen $x =$ konstant



Allmän form:

$$\boxed{ax + by = c}$$

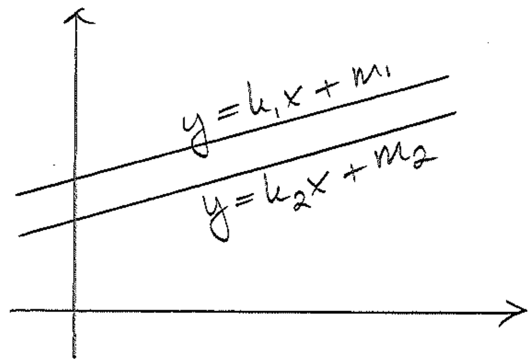
(alt. $ax + by + c = 0$)

Exempel:

$x - 3 = 0$

$3x - y = 1 \iff y = 3x - 1$

* **Parallella linjer**

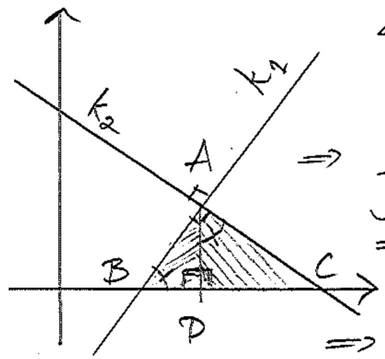


$$\boxed{k_1 = k_2}$$

Övning: Visa detta!

Ledning: Parallella linjer = Linjerna skär aldrig

* Vinkelräta linjer



$\triangle ABD \sim \triangle CAD$ ("är likformig med")

$\Rightarrow \underbrace{\frac{AD}{BD}}_{=k_1} = \underbrace{\frac{CD}{AD}}_{-1/k_2}$

$\Rightarrow \boxed{k_1 k_2 = -1}$

* Andragradskurvor

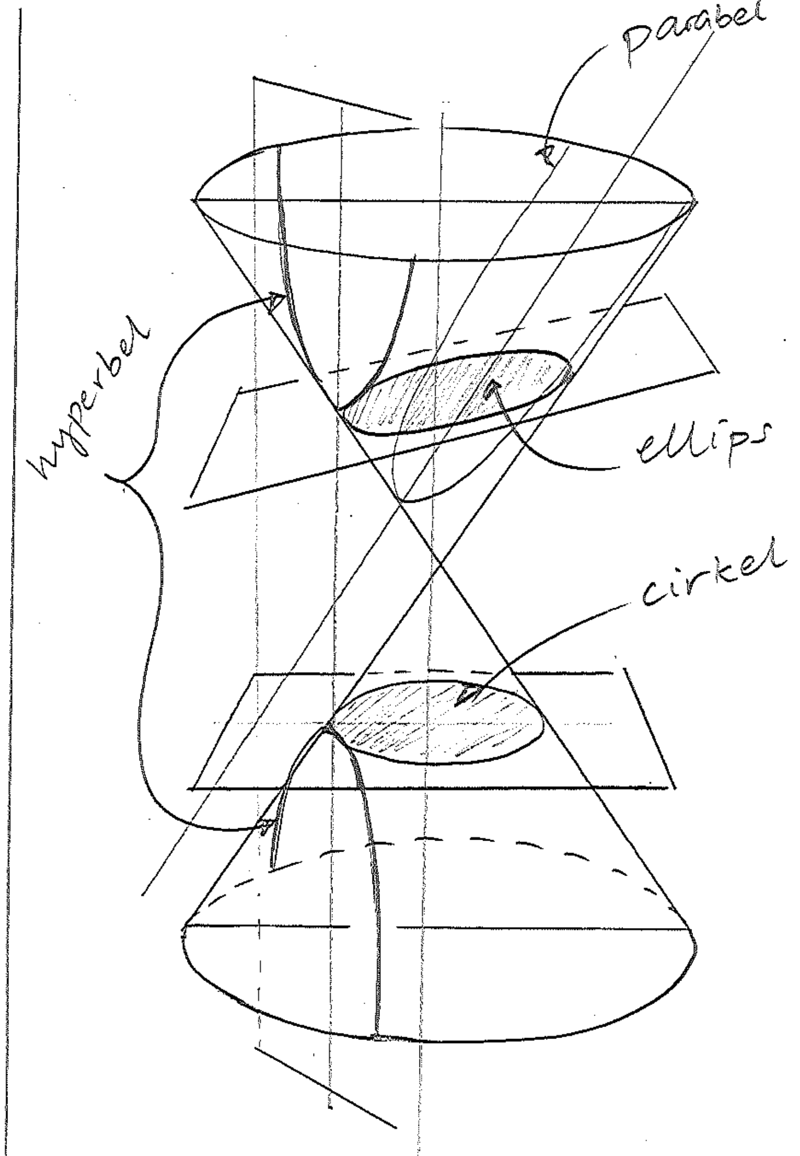
$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

(allmän form)

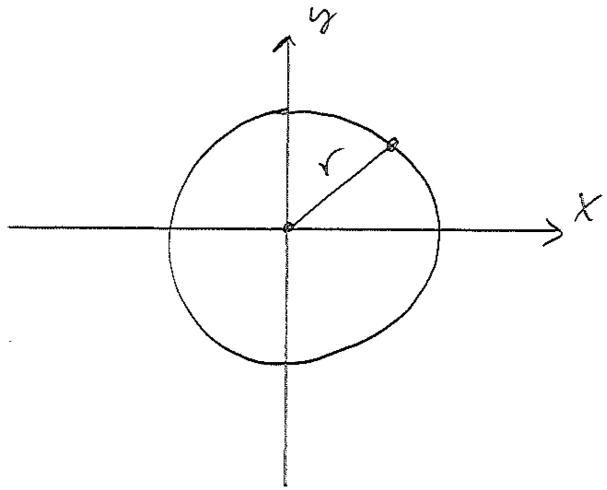
De olika specialfallen av andragradskurvor kallas "kägelsnitt" eller "koniska sektioner"

Fås som skärning mellan en dubbelkon och ett plan:

- parabel
- cirkel
- ellips
- hyperbel



* Cirkel

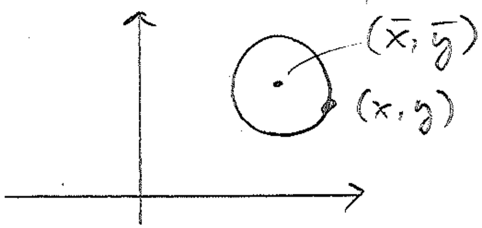


$$d(p,(0,0)) = r$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = r$$

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

Translatera till punkten $(\bar{x},\bar{y})$



Avståndsformeln ger:

$$d((x,y),(\bar{x},\bar{y})) = r$$

$$\sqrt{(x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2} = r$$

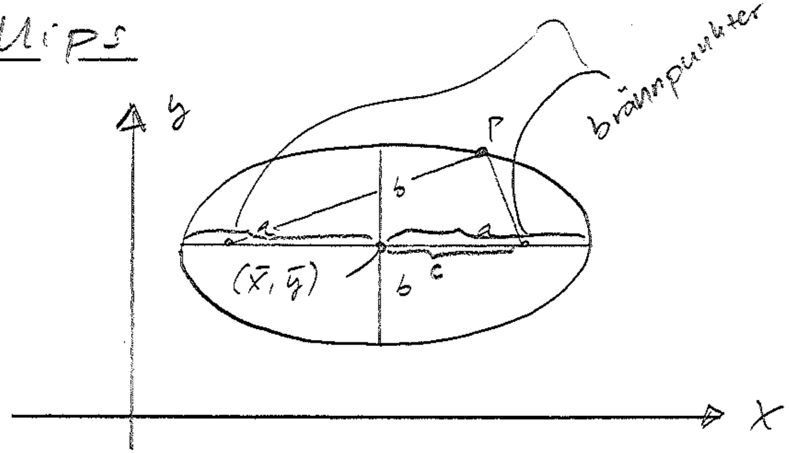
$$(x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2 = r^2$$

$$\boxed{\left(\frac{x-\bar{x}}{r}\right)^2 + \left(\frac{y-\bar{y}}{r}\right)^2 = 1}$$

Övning: Skriv på allmän form!
(Bestäm A, B, C, D, E)

Notera: $(\bar{x},\bar{y})$ anger translation och r anger skalning

* Ellips



$$\boxed{\left(\frac{x-\bar{x}}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-\bar{y}}{b}\right)^2 = 1}$$

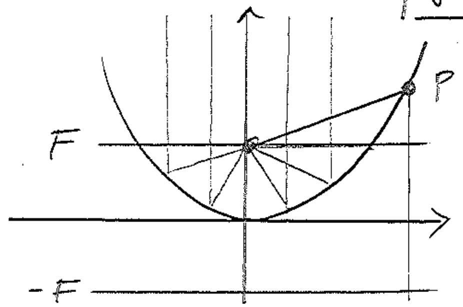
a och b kallas ellipsens halvaxlar

Notera: Summan av avståndet till brännpunkterna är konstant.

Övning: Visa att att detta avstånd ges av $k = 2a$ och att $c = \sqrt{a^2-b^2}$

* Parabel

$$\boxed{y = kx^2}$$



$F = \frac{1}{4k}$

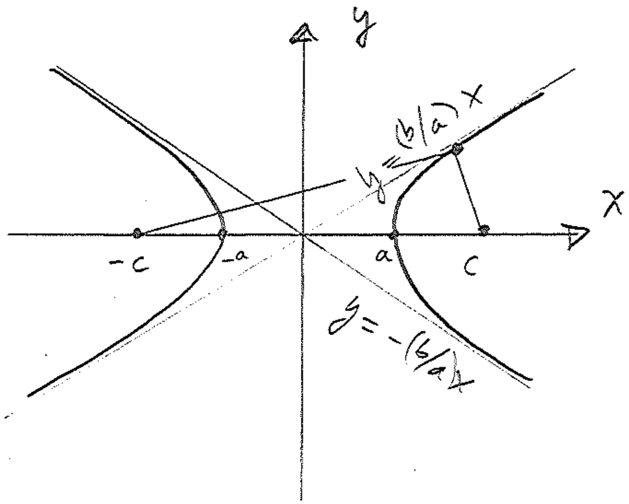
Notera:

(i) Samma avstånd till punkten $(0,F)$ som till planet $y=-F$.

(ii) Parallella strålar fokuseras i punkten $(0,F)$

Övning: Visa (i) + (ii)!

* Hyperbel



$$\boxed{\left(\frac{x-\bar{x}}{a}\right)^2 - \left(\frac{y-\bar{y}}{b}\right)^2 = \pm 1}$$

Tag $\bar{x} = \bar{y} = 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \pm 1$$

För stora x, y får vi

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 \approx \left(\frac{y}{b}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad y \approx \pm \frac{b}{a} x$$

Dessa linjer kallas hyperbelns asymptoter.

Övning: Visa att $xy = 1$ också definierar en hyperbel (i ett koordinatsystem roterat 45°).

Notera: Skillnaden i avstånd till brännpunkterna $c, -c$ är konstant $(= 2a)$