* <u>Idag:</u> Funktionslära

$\boxed{\text{I.04}}$ (RP Kap 4)

(ej avsnitt 4.8 om gränsvärden)

---

* <u>Definition:</u> Funktion

En funktion är en regel som för varje punkt x i en mängd $\underline{X}$ ger ett entydigt bestämt y i en mängd $\underline{Y}$.

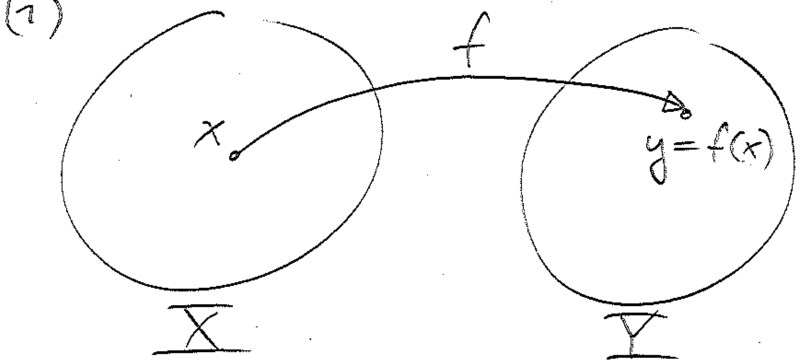
Skrivsätt:

$$f: \underset{(\cup\!\!\!\!\;|)}{\underline{X}} \longrightarrow \underset{(\cup\!\!\!\!\;|)}{\underline{Y}}$$

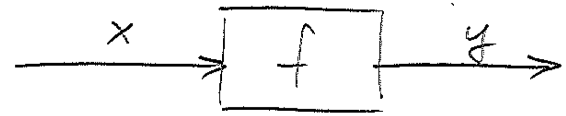
$$f: x \longmapsto f(x)$$

Illustration:

(i)



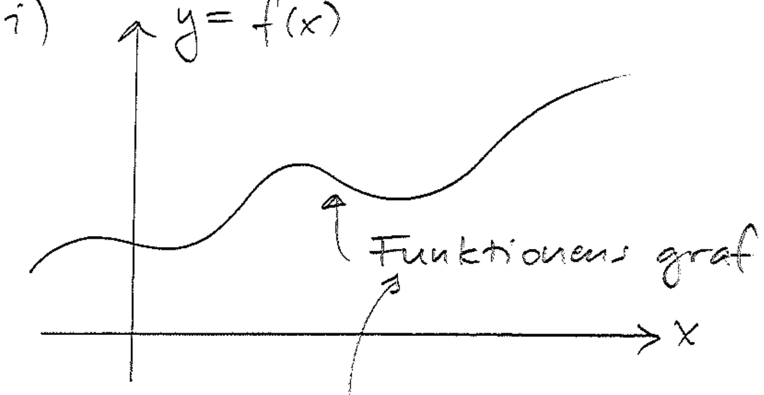
(ii)



f är en maskin som för varje x producerar ett y

<u>Notera:</u> $\underline{X}$ kan vara samma som $\underline{Y}$

(iii)



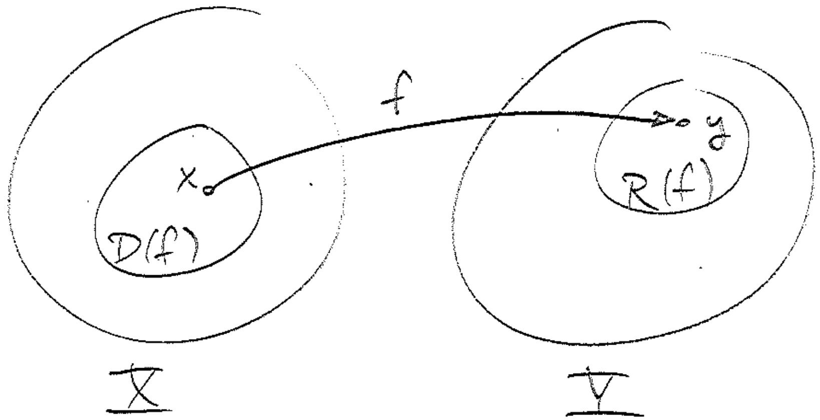
Alla punkter (x, y) som uppfyller $y = f(x)$.

* Definitionsmängd och värdemängd

$$f : D(f) \longrightarrow R(f)$$

definitionsmängd ("domain") värdemängd ("range")

<u>Notera</u>: $\begin{cases} D(f) \subseteq X \\ R(f) \subseteq Y \end{cases}$ "delmängd av"



<u>Exempel</u>:

$$f(x) = x^2$$

$$D(f) = (-\infty, \infty)$$

$$R(f) = [0, \infty)$$

<u>Exempel</u>:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$D(f) = [0, \infty)$$

$$R(f) = [0, \infty)$$

* Derivata

Derivatan av en funktion f i punkten x ges av

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

(om detta gränsvärde existerar).

Vi skall studera gränsvärden och derivator i detalj i läsperiod I. Idag fokuserar vi istället på räkneregler för derivator. Vi kommer i läsperiod I att bevisa samtliga dessa räkneregler.

* Deriveringsregler

(i) Räkneregler

$$\left\{\begin{aligned}
(f+g)' &= f' + g' \\
(f-g)' &= f' - g' \\
(\alpha f)' &= \alpha f'
\end{aligned}\right\} \text{Derivatan är linjär}$$

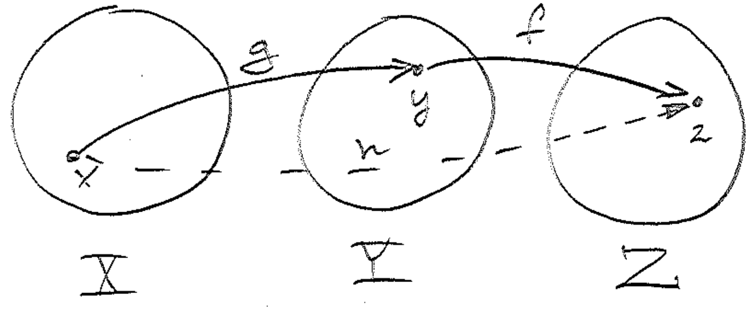
$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

(ii) Derivata av elementära funktioner

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^a	$a x^{a-1}$
b^x	$b^x \cdot \ln b$
e^x	e^x
$\ln x$	$1/x$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1/\cos^2 x$
$(\cot x$	$-1/\sin^2 x)$

(iii) Kedjeregeln



$$f : Y \longrightarrow Z$$

$$g : X \longrightarrow Y$$

$$h : X \longrightarrow Z$$

$$\begin{cases} h = f \circ g \quad \text{(komposition)} \\ h(x) = f(g(x)) \end{cases}$$

Inre derivatan

Kedjeregeln

$$\boxed{h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

Exempel:

$$f(x) = \sqrt{x^2+x-8}$$
$$= (x^2+x-8)^{1/2}$$
$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^2+x-8)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (2x+1)$$
$$= \frac{2x+1}{2 \cdot \sqrt{x^2+x-8}}$$

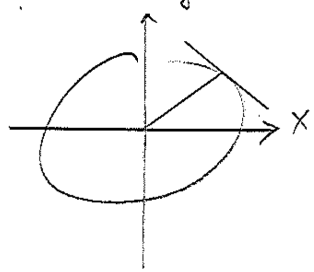
Exempel:

$$f(x) = \sin(\cos(e^{1/\sin(x)}))$$
$$\Rightarrow f'(x) = \cos(\cos(e^{1/\sin(x)})) \times$$
$$\times \left(-\sin(e^{1/\sin(x)})\right) \times$$
$$\times e^{1/\sin(x)}$$
$$\times \left(-\frac{1}{\sin^2(x)}\right) \times \cos x$$

(iv) Implicit derivering

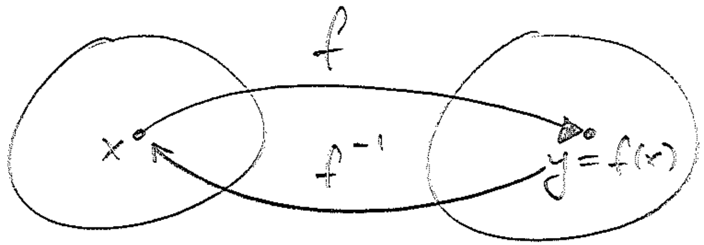
Bestäm derivatan $\frac{dy}{dx}$ ur ekvationen $F(x,y) = 0$ genom att derivera F m.a.p. x.

Exempel: Bestäm derivatan (lutningen) dy/dx på cirkeln $x^2+y^2=1$ i punkten $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$



$$x^2+y^2 = 1$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(x^2+y^2) = \frac{d}{dx}(1) = 0$$
$$2x + 2y \cdot y' = 0$$
$$y' = -2x/2y = -x/y$$
$$= -(1/\sqrt{2})/(1/\sqrt{2}) = -1$$

(v) Derivata av invers



$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(\underbrace{f(x)}_{=y})}}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}}$$

Exempel: Bestäm derivatan av

$$\arcsin = \sin^{-1}$$

$$\frac{d}{dx}(\arcsin x) = 1 \Big/ \frac{d}{dy}(\sin(y))$$

$$= \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{(\pm)\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$x \in [-1, 1]$
$y \in [-\pi/2, \pi/2]$

$\sin y = x$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

4 Maximi- och minimiproblem

Lokalt extremvärde:

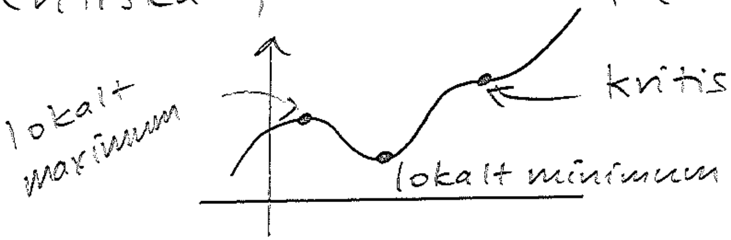
Punkt $\bar{x}$ sådan att

$f(x) \leq f(\bar{x})$ för alla x "i närheten av" $\bar{x}$ (lokalt maximum)

$f(x) \geq f(\bar{x})$ för alla x "i närheten av" $\bar{x}$ (lokalt minimum)

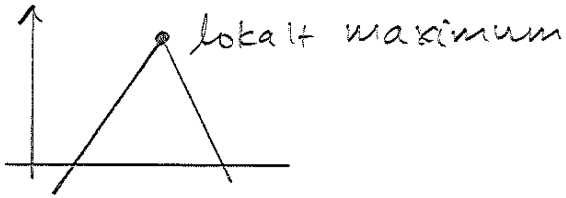
Tre typer av lokala extrempunkter:

(i) Kritiska punkter : $f'(x) = 0$

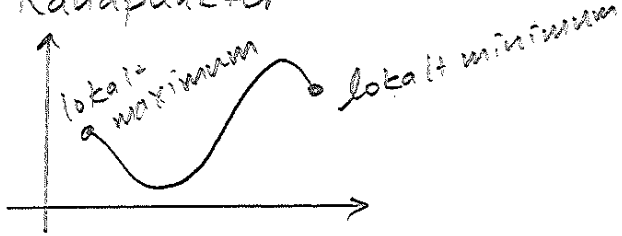


Tecken på $f''(x)$, eller mer allmänt teckenväxling för $f'(x)$, avgör min eller max

(ii) Punkter där $f'(x)$ ej existerar



(iii) Randpunkter



Globala extremvärden hittas genom att undersöka alla lokala extremvärden.

Exempel:

$$f(x) = x^4 - 8x^2$$

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x \cdot (x^2 - 4) = 4x \cdot (x+2)(x-2)$$

(i) Undersök kritiska punkter $(f'(x) = 0)$

$$f'(x) = 0 \quad \text{då} \quad x = 0, \; x = -2, \; x = 2$$

$$f''(x) = 12x^2 - 16$$

$x = -2$ $\quad f(x) = -16$ $\quad f'(x) = 0$ $\quad f''(x) = 32 > 0 \Rightarrow$ lokalt minimum $\cup$
$x = 0$ $\quad f(x) = 0$ $\quad f'(x) = 0$ $\quad f''(x) = -16 < 0 \Rightarrow$ lokalt maximum $\cap$
$x = 2$ $\quad f(x) = -16$ $\quad f'(x) = 0$ $\quad f''(x) = 32 > 0 \Rightarrow$ lokalt minimum $\cup$

(ii) Undersök punkter där $f'(x)$ ej är definierad: saknas

(iii) Undersök randpunkter

"$f(+\infty) = +\infty$"
"$f(-\infty) = +\infty$" $\quad \Longrightarrow$

Lokalt min: $x = \pm 2$
Lokalt max: $x = 0$
Globalt min: $x = 0$
Globalt max: saknas

* Kurvritning, grafer

Självstudium!