* Idag: Tentaräkning

$\boxed{\text{I 06}}$

Gammal dugga från 7 september 1995 kl 14.15–18.15 (min egen !!)

---

1. a) Bestäm rät linje $ax+by=c$ genom $(2,6)$ och $(5,-1)$

$$k = \frac{-1-6}{5-2} = \frac{-7}{3}$$

$\Rightarrow$ $y = kx+m$ med $k=-7/3$ $\Rightarrow$ $6 = -(7/3)\cdot 2 + m$ $\Rightarrow$ $m = 6+14/3$

$\therefore$ $y = -(7/3)x + 6 + 14/3 \Leftrightarrow 3y = -7x + 18 + 14 \Leftrightarrow \underline{\underline{7x+3y=32}}$

b) $$\frac{35^{15}\cdot 2^{16}}{14^{14}\cdot 25^{7}} = \frac{5^{\cancel{15}}\cdot 7^{\cancel{15}}\cdot 2^{\overset{2}{\cancel{16}}}}{\cancel{2^{14}}\cdot \cancel{7^{14}}\cdot \cancel{5^{14}}} = 5\cdot 7\cdot 4 = \underline{\underline{140}}$$

c) $$\frac{\frac{b^2}{a+b}+a-b}{1-\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}} = \frac{b^2\cdot(a+b)+(a-b)(a+b)^2}{(a+b)^2-(a-b)^2} = \frac{(a+b)\cdot(\cancel{b^2}+a^2-\cancel{b^2})}{2ab+2ab}$$

$$= \frac{(a+b)\cdot a^2}{4ab} = \underline{\underline{\frac{a\cdot(a+b)}{4b}}}$$

d) $2y^2 - 3xy - 2x^2 = 0$

Bestäm $y = y(x)$:

$$y^2 - \frac{3x}{2}y - x^2 = 0$$

$$y = \frac{3x}{4} \pm \sqrt{\frac{9x^2}{16} + \frac{16x^2}{16}}$$

$$= \frac{3x}{4} \pm \frac{5x}{4} = \begin{cases} 2x & \text{eller} \\ -x/2 \end{cases}$$

e) Finn reella lösningar till

$$|5x + 4| = 3$$

$$\Leftrightarrow \quad |x - (-4/5)| = 3/5$$

$$\Rightarrow \quad x = \begin{cases} -4/5 + 3/5 \\ -4/5 - 3/5 \end{cases}$$

$$x = \begin{cases} -1/5 & \text{eller} \\ -7/5 \end{cases}$$

f) Förenkla:

2

$$\left((a^{-2}b^3)^3 \cdot b^{-4}\right)^3 \Big/ \left(\sqrt{\frac{b^2}{a^4}} \cdot \sqrt{\sqrt{\frac{1}{a}}}\right)$$

$$= \left(a^{-6}b^9 \cdot b^{-4}\right)^3 \Big/ \left(\frac{|b|}{a^2} \cdot a^{-1/4}\right)^{12}$$

$$= a^{-18}b^{15} \Big/ \left(b^{12} \cdot a^{-24} \cdot a^{-3}\right)$$

$$= a^{-18+24+3} \cdot b^{15-12} = \underline{\underline{a^9 \cdot b^3}}$$

$$\begin{cases} a > 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$$

2.a) Bestäm ekv. för tangent till $y = \ln(5 - 9x + 4x^2)$ då $x = 2$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{-9 + 8x}{5 - 9x + 4x^2} = \frac{-9 + 16}{5 - 18 + 16} = \frac{7}{3} = k$$

$$y = kx + m = 7/3\,x + m$$

$$\ln(5 - 18 + 16) = 7/3 \cdot 2 + m$$

$$m = \ln 3 - 14/3$$

$$\therefore \quad y = (7/3)x + \ln 3 - 14/3$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{7x - 3y = 14 - 3\ln 3}$$

b)

$$\frac{2}{x-2} \geqslant \frac{3}{x^2-2x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{x-2} \geqslant \frac{3}{x\cdot(x-2)}, \quad x \neq 2$$

$\underline{x > 2}$

$2 \geqslant 3/x$

$\Leftrightarrow \quad x \geqslant 3/2$

$\therefore \quad x > 2$

$\underline{x < 2}$

$2 \leq 3/x$

$\underline{x < 0}$

$2x \geqslant 3$

$x \geqslant 3/2$

$\lightning$

$\underline{0 < x < 2}$

$2x \leq 3$

$x \leq 3/2$

$\therefore \quad 0 < x \leq 3/2$

Svar: $\underline{\underline{0 < x \leq 3/2 \text{ eller } x > 2}}$

3. a)

$$\tan 9x + \tan 5x = 0$$

$$\tan 9x = -\tan 5x = \tan(-5x)$$

$$9x = -5x + \pi n$$

$$14x = \pi n$$

$$\underline{\underline{x = \frac{\pi}{14}\cdot n, \quad n \in \mathbb{Z}}}$$

b)

$$\cos 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 9x = -\sin 5x = \sin(-5x)$$

$$= \cos(\pi/2 + 5x)$$

$$9x = \pm(\pi/2 + 5x) + 2\pi n$$

$$\begin{cases} 4x = \pi/2 + 2\pi n \Leftrightarrow x = \pi/8 + \frac{\pi}{2} n \\ 14x = -\pi/2 + 2\pi n \Leftrightarrow \underline{\underline{x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi}{7} n}} \end{cases}$$

c)

$$\cos 9x + \cos 5x = 0$$

$$\cos 9x = -\cos 5x = \cos(\pi - 5x)$$

$$9x = \pm(\pi - 5x) + 2\pi n$$

$$14x = \pi + 2\pi n \Leftrightarrow x = \pi/14 + \frac{\pi}{7} n$$

$$4x = -\pi + 2\pi n \Leftrightarrow \underline{\underline{x = -\pi/4 + \frac{\pi}{2} n}}$$

(Notera: Samma som $x = -\pi/14 + \pi/7 n$
$x = \pi/4 + \pi/2 n$

4. a) $27x^5 = 8x^2$

$x^2 \cdot (27x^3 - 8) = 0$

$\Rightarrow \underline{\underline{x_1 = x_2 = 0}}$ dubbelrot

$27x^3 - 8 = 0$

$x^3 = 8/27$

$(re^{i\theta})^3 = 8/27 \cdot e^{i \cdot 0}$

$$\begin{cases} r = \sqrt[3]{8/27} = 2/3 \\ 3\theta = 0 + 2\pi n \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = 2/3 \\ \theta = 2\pi/3 \; n = 0, 2\pi/3, 4\pi/3 \end{cases}$$

$\cos 2\pi/3 = \cos(\pi - \pi/3) = -\cos(\pi/3) = -\frac{1}{2}$

$\sin 2\pi/3 = \sin(\pi - \pi/3) = \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$

$\cos 4\pi/3 = -1/2$

$\sin 4\pi/3 = -\sqrt{3}/2$

$\underline{\underline{x_3 = 2/3}}$

$x_4 = 2/3 \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = \underline{\underline{\frac{-1 + \sqrt{3}i}{3}}}$

$x_5 = 2/3 \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = \underline{\underline{\frac{-1 - \sqrt{3}i}{3}}}$

b) $2x + \ln(1 + e^{-x}) = 0$

Låt $\underbrace{z = e^{-x}}_{>0} \Rightarrow x = -\ln z$

$-2\ln z + \ln(1 + z) = 0$

$\ln\left(\frac{1+z}{z^2}\right) = 0$

$\frac{1+z}{z^2} = 1 \Leftrightarrow 1 + z = z^2$

$\Leftrightarrow z^2 - z - 1 = 0$

$z = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\therefore \quad x = -\ln\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)$

$= -\ln \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

$= \ln \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \ln \frac{2 \cdot (1 - \sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}$

$= \ln \frac{2 \cdot (1 - \sqrt{5})}{1 - 5} = \underline{\underline{\ln\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)}}$

5. Antag: $x$ liter juice hälls från A

| | Juice A | Vatten A | Juice B | Vatten B |
|---|---|---|---|---|
| 1. | $1\,l$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| 2. | $(1-x)\,l$ | $0$ | $x\,l$ | $0$ |
| 3. | $(1-x)\,l$ | $0$ | $x\,l$ | $(1-x)\,l$ (=> andelen juice är $x$) |
| 4. | $((1-x)+x\cdot x)\,l$ | $x\cdot(1-x)\,l$ | $(x-x\cdot x)\,l$ | $((1-x)-x\cdot(1-x))\,l$ |

Finn minimum för $(1-x)+x^2$, $x\in[0,1]$

$f(x) = 1-x+x^2$

$f'(x) = -1+2x = 0 \Rightarrow x = 1/2$, minimum tz $f''(x) > 0$

$\Rightarrow f(1/2) = 1-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \underline{\underline{3/4}}$

∴ Svar: <u>Minst 75%</u>

6. $$f(x) = \frac{x\cdot(x-2)^2}{(x+5)(x^2-1)}$$

* Singulär vid $\begin{cases} x=-5 \\ x=\pm 1 \end{cases}$

(Har asymptoter $x=-5$, $x=\pm 1$)

* $x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to 1$ (asymptot)

$x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to 1$ (asymptot)

* Kritiska punkter

$$f(x) = g(x)/h(x)$$

$$g(x) = x\cdot(x-2)^2 \Rightarrow g'(x) = (x-2)^2 + x\cdot 2(x-2) = (x-2)\cdot(x-2+2x)$$
$$= (x-2)\cdot(3x-2)$$

$$h(x) = (x+5)(x^2-1) \Rightarrow h'(x) = (x^2-1) + (x+5)\cdot 2x = 3x^2+10x-1$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{g'h-hg'}{h^2} = \frac{(x-2)(3x-2)\cdot(x+5)(x^2-1) - x(x-2)^2\cdot(3x^2+10x-1)}{(x+5)^2(x^2-1)^2}$$

$f'(x)=0$ då $\underline{\underline{x=2}}$ eller $(3x-2)(x+5)(x^2-1) - x(x-2)\cdot(3x^2+10x-1) = 0$

$$0 = (3x-2)\cdot(x^3 - x + 5x^2 - 5) - x\cdot(3x^3 + 10x^2 - x - 6x^2 - 20x + 2)$$

$$= \cancel{3x^4} - 3x^2 + 15x^3 - 15x - 2x^3 + \cancel{2x} - 10x^2 + 10$$
$$- \cancel{3x^4} - 10x^3 + x^2 + 6x^3 + 20x^2 - \cancel{2x}$$

$$= 9x^3 + 8x^2 - 15x + 10$$

Gissar lösning $x = -2$:

$$-9\cdot 2^3 + 8\cdot 2^2 + 15\cdot 2 + 10 = -72 + 32 + 30 + 10 = 0 \quad \text{(Vilken tur!!!)}$$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{r|l}
 & 9x^2 - 10x + 5 \\
\hline
x+2 & \cancel{9x^3} + 8x^2 - 15x + 10 \\
 & \cancel{9x^3} + 18x^2 \\
\hline
 & -\cancel{10x^2} - 15x + 10 \\
 & -\cancel{10x^2} - 20x \\
\hline
 & 5x + 10 \\
 & 5x + 10 \\
\hline
\end{array}$$

Lös ut rötterna:

$$9x^2 - 10x + 5 = 0$$

$$x^2 - \frac{10}{9}x + \frac{5}{9} = 0$$

$$x = -\frac{5}{9} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{9}\right)^2 - \frac{5}{9}}$$

$\Rightarrow$ Saknar reella rötter.

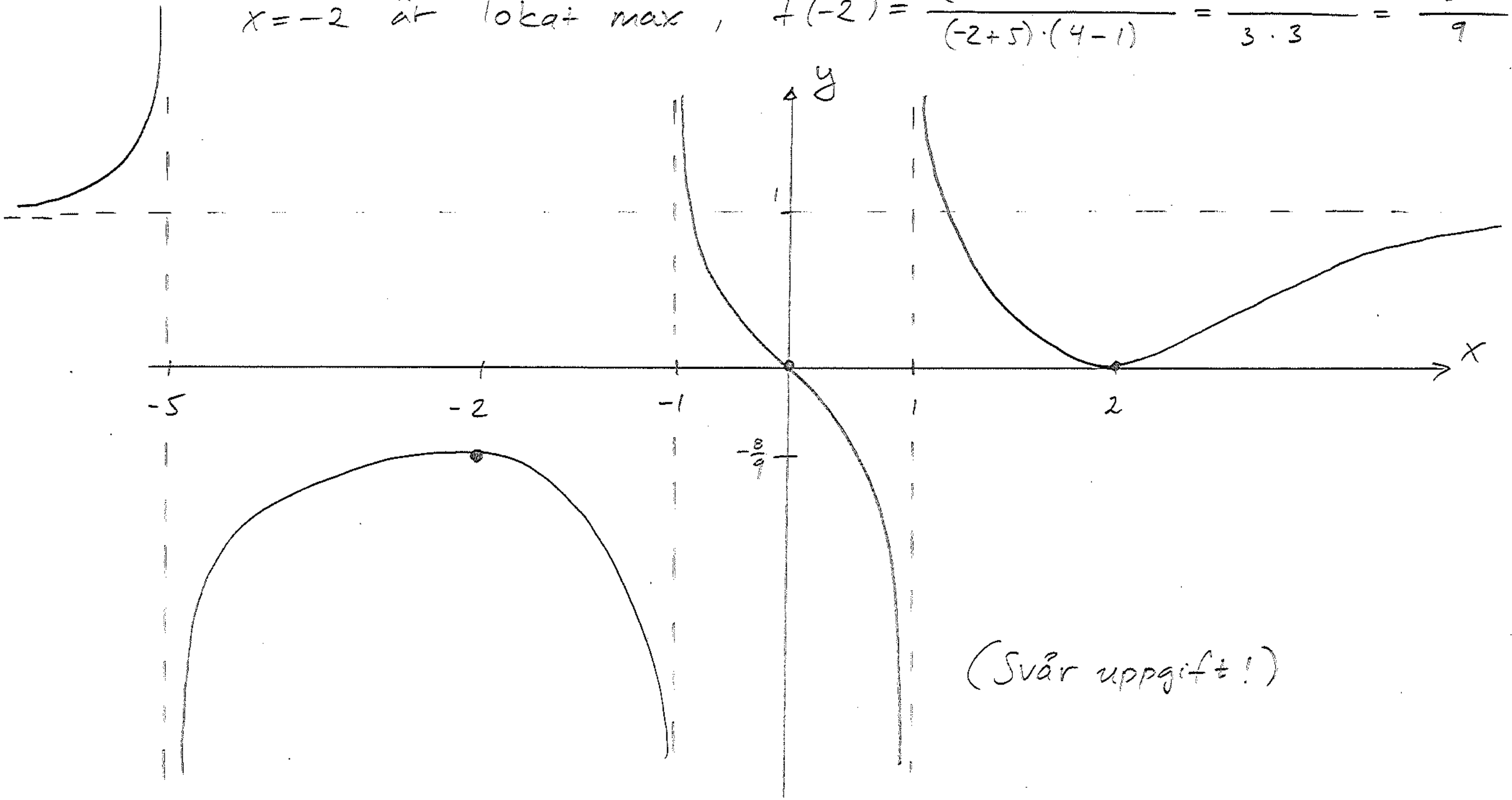
$\therefore$ Två kritiska punkter: $x = \pm 2$

Min eller max?

$x = +2$ är uppenbart lokalt min (faktor $(x-2)^2$), $f(2) = 0$

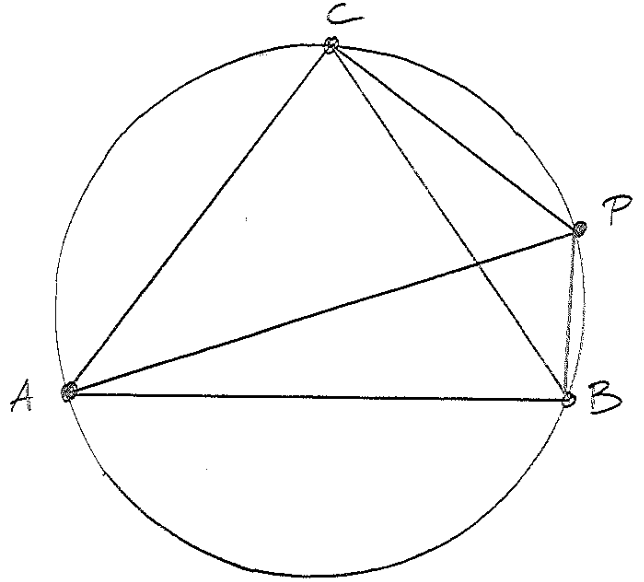
Från studie av asymptoter följer att

$x = -2$ är lokalt max, $f(-2) = \dfrac{(-2)\cdot(-2-2)^2}{(-2+5)\cdot(4-1)} = \dfrac{-2\cdot 16}{3\cdot 3} = \dfrac{-32}{9}$




(Svår uppgift!)

7.

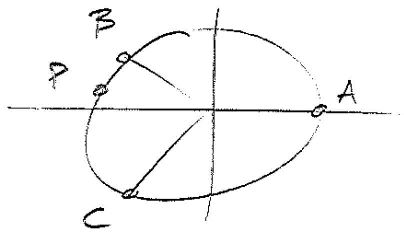



Liksidig triangel ABC

Visa att

$$|AP| = |BP| + |CP|$$

Vi kan utan vidare anta att punkterna A, B, C ligger på enhetscirkeln:




$A = (1, 0)$

$B = \left(\cos\frac{2\pi}{3}, \sin\frac{2\pi}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$C = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$P = (\cos\theta, \sin\theta)$

$$\Rightarrow |AP|^2 = (1-\cos\theta)^2 + (0-\sin\theta)^2 = 1 + \cos^2\theta - 2\cos\theta + \sin^2\theta$$
$$= 2 - 2\cos\theta$$

$$|BP|^2 = \left(-\frac{1}{2} - \cos\theta\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin\theta\right)^2 = \underline{\frac{1}{4}} + \underline{\cos^2\theta} + \cos\theta + \underline{\frac{3}{4}} + \underline{\sin^2\theta} - \sqrt{3}\sin\theta$$
$$= 2 + \cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta$$

$$|CP|^2 = \left(-\frac{1}{2} - \cos\theta\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin\theta\right)^2 = \underline{\frac{1}{4}} + \underline{\cos^2\theta} + \cos\theta + \underline{\frac{3}{4}} + \underline{\sin^2\theta} + \sqrt{3}\sin\theta$$
$$= 2 + \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$$

Vill visa att $|AP| = |BP| + |CP|$

$$\Leftrightarrow \quad |AP|^2 = |BP|^2 + |CP|^2 + 2|BP|\cdot|CP|$$

$$|BP|^2 + |CP|^2 + 2|BP|\cdot|CP| = 2 + \cos\theta - \cancel{\sqrt{3}\sin\theta} + 2 + \cos\theta + \cancel{\sqrt{3}\sin\theta}$$

$$+ 2\cdot\sqrt{(2+\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta)\cdot(2+\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)}$$

$$= 4 + 2\cos\theta + 2\cdot\sqrt{(2+\cos\theta)^2 - 3\sin^2\theta}$$

$$= 4 + 2\cos\theta + 2\cdot\sqrt{4+\cos^2\theta + 4\cos\theta - 3\cdot(1-\cos^2\theta)}$$

$$= 4 + 2\cos\theta + 2\cdot\sqrt{1 + 4\cos^2\theta + 4\cos\theta}$$

$$= 4 + 2\cos\theta + 2\cdot\left|1 + 2\cos\theta\right|$$

$$= 4 + 2\cos\theta - 2\cdot(1 + 2\cos\theta), \text{ ty } 2\cos\theta < -1$$

$$= 4 - 2 + 2\cos\theta - 4\cos\theta$$

$$= 2 - 2\cos\theta = |AP|^2$$

$$\therefore \quad |AP| = |BP| + |CP|$$

$\blacksquare$

8. Antag att de reella talen är uppräkneliga.
Speciellt är då de reella talen mellan 0 och 1 uppräkneliga.
Låt $x_n$ vara en uppräkning av de reella talen mellan 0 och 1 för $n = 1, 2, 3, \ldots$

Bilda nu talet $y \in [0,1)$ genom att välja första decimalen i $y$ till något annat än första decimalen i $x_1$. Fortsätt på samma sätt och välj decimal nummer $n$ till något annat (t.ex. $9-d$ om decimalen är $d$) än decimal nummer $n$ i $x_n$.
Ger då ett tal $y$ som skiljer sig från $x_n$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$

$\Rightarrow$ $y$ finns ej med i listan!
Detta är en motsägelse (ty listan antas innehålla samtliga reella tal).

$$\begin{cases} x_1 = 0,d_1 * * * * \ldots \\ x_2 = 0,* d_2 * * * \ldots \\ x_2 = 0,* * d_3 * * \ldots \\ \vdots \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Antagandet är falskt, dvs de reella talen är ej uppräkneliga.

Tag $y = 0,\underbrace{(9-d_1)(9-d_2)(9-d_3)}_{\text{decimaler}}\ldots$