Dugga 13/9 - 2014

I 07

1.

$$\frac{a^6-8}{a^4+4a^2+4} = \{\text{låt } b=a^2\}$$

$$= \frac{b^3-2^3}{b^2+4b+4} = \frac{(b-2)(b^2+2b+4)}{b^2+4b+4}$$

∴ Svar: $\underline{\underline{D}}$

2.

$$\Big(\sqrt{\underbrace{6-\sqrt{20}}_{<6}}\Big)^2 = 6-\sqrt{20} = 6-\sqrt{4\cdot5} = 6-2\sqrt{5}$$

a) $(\underbrace{\sqrt{5}-1}_{>0})^2 = 5+1-2\sqrt{5} = 6-2\sqrt{5}$, Ja

b) $1-\sqrt{5} < 0$, Nej

c) Nej

∴ Svar: $\underline{\underline{A}}$

---

3. $\sqrt{x+3} = -x-3$, $x \geq -3$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+3} = -(x+3)$, $x \geq -3$

En lösning: $\underline{\underline{x=-3}}$.

För $x>-3$:

$$1 = -\frac{x+3}{\sqrt{x+3}} = \underbrace{-\sqrt{x+3}}_{<0}$$ saknar lösning

∴ Svar: $\underline{\underline{B}}$

4.

$$4^x - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$$

Notera: $4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2$

Låt $z = 2^x$

$$z^2 - 10 \cdot z + 16 = 0$$

$$z = 5 \pm \sqrt{25-16} = 5 \pm \sqrt{9} = 5 \pm 3$$

$$= \begin{cases} 8 \\ 2 \end{cases}$$

$$2^x = 8 \iff x = \log_2 8 = 3$$

$$2^x = 2 \iff x = 1$$

$\therefore$ Svar: $\underline{\underline{C}}$

5.

$$\log_3 (\log_5 x) \leq 0$$

$$\iff \log_5 x \leq 1$$

$$\iff 5^{\log_5 x} \leq 5^1 = 5$$

$$x \leq 5$$

$\therefore$ Svar: $\underline{\underline{C}}$

9. $x^2 + 24xy + 68y^2 = 0$

Notera: $x = y = 0$ är lösning

Ansätt $y = kx$:

$$x^2 + 24 \cdot x \cdot kx + 68(kx)^2 = 0$$

$$x^2 + 24kx^2 + 68k^2x^2 = 0$$

$x \neq 0$ ger

$$1 + 24k + 68k^2 = 0$$

$$k^2 + \frac{\overset{\cancel{12}\ 6}{\cancel{24}}}{\underset{\cancel{34}\ 17}{\cancel{68}}} k + \frac{1}{68} = 0$$

$$k = -\frac{6}{24} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{24}\right)^2 - \frac{1}{68}} = k_1, k_2$$

$\therefore$ Två linjer $y = k_1x$, $y = k_2x$ genom origo.

Degenererad hyperbel

$\therefore$ Svar: $\underline{?}$

10.

$$z + \bar{z} > 0 \implies \operatorname{Re} z > 0$$
$$iz + \overline{iz} < 0 \implies \operatorname{Im} z > 0$$

$\Big\}$ Första kvadranten

$$\begin{aligned} iz + \overline{iz} &= (a+bi)\cdot i + \overline{(a+bi)i} \\ &= ai - b + \overline{ai - b} \\ &= ai - b - ai - b \\ &= -2b < 0 \iff 2b > 0 \iff b > 0 \end{aligned}$$

$\therefore$ Svar: A

11.

$z = 2e^{i\pi/3}$, $|z| = 2$, $z \in$ 1:a kvadranten

a) $|e^{i2\pi/3}| = 1 \neq z$

b) $-2e^{-i\pi/3} \in$ 2:a kvadranten

c) $\overline{2e^{-i\pi/3}} = 2\cdot e^{i\pi/3} = z$

$\therefore$ Svar: C

---

12. $(x+1)(x-2)(x-6)(x-7) < 0$

>0 $\underbrace{<0}$ $\underbrace{>0}$ <0 >0

-1 0 1 2 3 4 5 6 7

$\times$ $\times$

2 st.

$\therefore$ Svar: A

13.

$$x^2 + 2y^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{1}\right)^2 = 1$$

a b

$\therefore$ Svar: D

14.

$$\frac{x-3}{x+2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ \text{och} \\ (x-3) \text{ och } (x+2) \\ \text{har samma tecken} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (a)

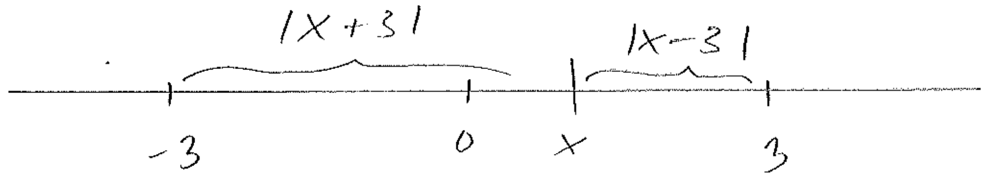
$\Leftrightarrow$ (b)

$\Leftrightarrow$ (c)

$\therefore$ Svar: D

15.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{avstånd till } -3}}{|x+3|} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{avstånd till } 3}}{|x-3|} = 6$$



$\Rightarrow \quad -3 \leq x \leq 3$ uppfyller ekv.

$\Rightarrow \quad 0 < x < 3$ uppfyller ekv.

$\therefore$ Svar: $\underline{\underline{A}}$

16.

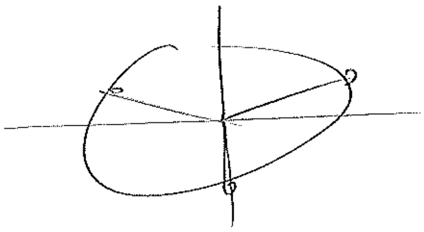
$$\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{5}}{\frac{2}{15}-\frac{7}{12}} = \frac{\frac{5+7}{35}}{\frac{12\cdot 2-7\cdot 15}{15\cdot 12}} = \frac{12\cdot \overset{3}{\cancel{15}}\cdot 12}{\underset{7}{\cancel{35}}\cdot(24-105)}$$

$$= \frac{\overset{4}{\cancel{12}}\cdot \overset{1}{\cancel{3}}\cdot \overset{4}{\cancel{12}}}{-\underset{\substack{\cancel{27}\\ \cancel{9}\\ 3}}{\cancel{81}}\cdot 7} = \underline{\underline{-\frac{16}{21}}}$$

17.

$$\log_{5\sqrt{5}} 5 = \log_{5^{3/2}} 5 = \log_{5^{3/2}} \left(5^{3/2}\right)^{2/3}$$

$$= \frac{2}{3} \log_{5^{3/2}} 5^{3/2} = \frac{2}{3}\cdot 1 = \underline{\underline{2/3}}$$



$$f(\pi/6) = (\sqrt{3}/2)^2 + \tfrac{1}{2} - 3$$
$$= 3/4 + 1/2 - 3$$
$$= 3/4 + 2/4 - 12/4$$
$$= -7/4$$

$$f(5\pi/6) = (-\sqrt{3}/2)^2 + \tfrac{1}{2} - 3 = -7/4$$

$$f(3\pi/2) = 0 - 1 - 3 = -4$$

$\therefore$ Svar: $\underline{\underline{-4}}$

20.

$$2^{\pi - x}\cos(\pi x) = (-1)^{x+10} \cdot 4^{x+\frac{\pi}{2}-3}$$

$$\cos(\pi x) = (-1)^{x+10} \cdot (2^2)^{x+\frac{\pi}{2}-3} \cdot 2^{x-\pi}$$

$$\cos(\pi x) = (-1)^{x+10} \cdot 2^{2x+\cancel{\pi}-6} \cdot 2^{x-\cancel{\pi}}$$

$$\underbrace{\cos(\pi x)}_{VL} = \underbrace{(-1)^{x+10} \cdot 2^{3x-6}}_{HL}$$

$|VL| \leq 1$

$|HL| = 2^{3x-6} > 1$ för $3x - 6 > 0$

$\iff 3x > 6$

$\iff x > 2$

$\Rightarrow$ Lösning saknas för $x > 2$

$VL(2) = \cos(2\pi) = 1$

$HL(2) = (-1)^{12} \cdot 2^{3\cdot 2 - 6} = 2^0 = 1$

$\therefore$ $x = 2$ är en heltalslösning och

därmed största heltalslösning.

---

c.

$\sin(\ln x) = \cos(\ln x^2)$

$\sin(\ln x) = \sin(\pi/2 - 2\ln x)$

$\ln x = \pi/2 - 2\ln x + 2\pi n$

$3\ln x = \pi/2 + 2\pi n$

$$\underline{\underline{x = e^{\pi/6 + 2\pi/3\, n}}}$$

CHALMERS

Maskinteknik & Teknisk fysik & Teknisk matematik

Dugga 1

13 september 2014, 10:30–12:30

Skrivtid: 120 min
Inga hjälpmedel tillåtna.
OBS! Lämna *inte* in kladdpapper och lösningsskisser till uppgifterna 1–20.

Eventuella frågor kan ställas per telefon.
Anders Logg: 031-7725346 (främst M)
Jana Madjarova: 073-7855697 (främst F och TM)

Namn och program: ....

Personnummer: ....

A. Markera rätt svar genom att ringa in. (1p för varje rätt svar; OBS! Endast ett rätt svar per uppgift.)

1. Uttrycket $\dfrac{a^6-8}{a^4+4a^2+4}$ är för alla reella a lika med är lika med

   (a) a^2-2; (b) a^2+2; (c) $(a-2)^2$; (d) inget av (a)-(c).

2. Talet $\sqrt{6-\sqrt{20}}$ är lika med

   (a) $\sqrt{5}-1$; (b) $1-\sqrt{5}$; (c) $\sqrt{6}-\sqrt[4]{20}$; (d) annat svar.

3. Antalet (reella) lösningar till ekvationen $\sqrt{x+3}=-x-3$ är

   (a) 0; (b) 1; (c) 2; (d) inget av (a)-(c).

4. Den största lösningen till ekvationen $4^x-10\cdot 2^x+16=0$ är

   (a) -1; (b) 1; (c) 3; (d) inget av (a)-(c).

5. Det största heltalet som uppfyller $\log_3(\log_5 x))\leq 0$ är

   (a) 1; (b) 3; (c) 5; (d) annat svar.

6. Om $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$ och $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, så har $\sin 2\alpha$ värdet

(a) $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$; (b) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$; (c) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$; (d) annat värde.

7. Om $\cos\alpha = t$ och $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, så har $\tan\alpha$ värdet

(a) $\frac{\sqrt{1-t^2}}{t^2}$; (b) $\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}$; (c) $\frac{\sqrt{1-t^2}}{-t}$; (d) annat värde.

8. Markera det tal som *inte* kan vara antalet kanter i en pyramid

(a) 28; (b) 29; (c) 30; (d) inget av (a)-(c).

9. Ekvationen $x^2 + 24xy + 68y^2 = 0$ representerar en

(a) ellips; (b) parabel; (c) hyperbel; (d) går inte att avgöra.

10. För det komplexa talet z gäller att $z + \bar{z} > 0$, $iz + \overline{iz} < 0$. Talet z ligger i

(a) första kvadranten; (b) andra kvadranten;
(c) annan kvadrant; (d) går ej att avgöra.

11. Talet $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ är lika med

(a) $e^{i\frac{2\pi}{3}}$; (b) $-2e^{-i\frac{\pi}{3}}$; (c) $\overline{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}$; (d) inget av (a)-(c).

12. Antalet heltalslösningar till olikheten $(x+1)(x-2)(x-6)(x-7) < 0$ är

(a) 2; (b) 4; (c) 6; (d) inget av (a)-(c).

13. Ellipsen $x^2 + 2y^2 = 2$ beskrivs av $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$ för

(a) $a = 2$, $b = 1$; (b) $a = 1$, $b = 2$; (c) $a = 1$, $b = \sqrt{2}$; (d) inget av (a)-(c).

14. Markera den olikhet som *inte* är ekvivalent med olikheten $\frac{3-x}{x+2} > 0$

(a) $\frac{x-3}{x+2} < 0$;
(b) $(3-x)(x+2) > 0$;
(c) $\frac{2+x}{3-x} > 0$;
(d) alla olikheter i (a)-(c) är ekvivalenta med den givna.

15. Likheten $|x+3|+|x-3|=6$ gäller för alla x som uppfyller

(a) $0 < x < 3$;
(b) $x < -3$;
(c) $x > 3$;
(d) inget av ovanstående.

B. Lös uppgifterna nedan; ange endast svar. (2p för varje rätt svar)

16. Beräkna

$$\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{5}}{\frac{2}{15}-\frac{7}{12}}.$$

Ange svaret på formen $\frac{p}{q}$, där p, q är relativt prima heltal.

Svar:

17. Beräkna och ange $\log_{5\sqrt{5}} 5$.

Svar:

18. Givet att $S = 2 + a_2 + a_3 + 54$ är en geometrisk summa, beräkna och ange S.

Svar:

19. Givet funktionen $f(x) = \cos^2 x + \sin x - 3$, ange dess minsta värde.

Svar:

20. Ange den största heltalslösningen till ekvationen

$$2^{\pi - x} \cos(\pi x) = (-1)^{x+10} \cdot 4^{x+\frac{\pi}{2}-3}.$$

Svar:

C. Ge fullständig lösning till uppgiften nedan. (max 5p)

Lös ekvationen

$$\sin(\ln x) = \cos(\ln(x^2)).$$

DUGGA 1, 13 SEPTEMBER 2014 - SVAR

A.

1d
2a
3b
4c
5c
6b
7c
8b
9c
10a
11c
12a
13d
14d
15a

B.

16: $-\frac{16}{21}$
17: $\frac{2}{3}$
18: 80
19: -4
20: 2

C. *Lösning 1:* För att $\ln x$ ska vara definierad krävs att $x > 0$. För positiva x gäller $\ln(x^2) = 2\ln x$. Genom att använda en av formlerna för cosinus av dubbla vinkeln får vi

$$\sin(\ln x) = 1 - 2\sin^2(\ln x).$$

Sätt $t = \sin(\ln x)$. Vi behöver lösa andragradsekvationen för t

$$2t^2 + t - 1 = 0.$$

Dess lösningar är $t_1 = \dfrac{1}{2}$ och $t_2 = -1$.

(1) $\sin(\ln x) = \dfrac{1}{2}$: Lösningarna är

$$\ln x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad \text{d.v.s.} \quad x = e^{\frac{\pi}{6}+2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

och

$$\ln x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad \text{d.v.s.} \quad x = e^{\frac{5\pi}{6}+2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(2) $\sin(\ln x) = -1$: Lösningarna är

$$\ln x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \text{d.v.s.} \quad x = e^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Man kan förenkla något och skriva alla lösningar som

$$\ln x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, \quad \text{d.v.s.} \quad x = e^{\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

och

$$\ln x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \text{d.v.s.} \quad x = e^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Lösning 2: För att $\ln x$ ska vara definierad krävs att $x > 0$. För positiva x gäller $\ln(x^2) = 2\ln x$. Ekvationen kan skrivas om som

$$\sin(\ln x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\ln x\right).$$

Lösningarna är då alla x sådana att

$$\ln x = \frac{\pi}{2} - 2\ln x + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

eller

$$\ln x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 2\ln x\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

vilket ger samma lösningsskara.