TMV225
Kapitel 1

Övning 1.1

Låt $A = \{1, 2, 3\}$ och $B = \{2, 3, 4\}$. Bestäm mängden.

a) $A \cup B$

$\cup$ - Union: Alla element som ligger i antingen A eller B.

$$\implies A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}.$$

b) $A \cap B$

$\cap$ - Snitt: Alla element som ligger i både A och B.

$$\implies A \cap B = \{2, 3\}.$$

c) $A \backslash B$

$\backslash$ - Differens: Alla element i A som inte ligger i B.

$$\implies A \backslash B = \{1\}.$$

d) $A \times B$

$\times$ - Produkt: Alla ordnade par (a, b) där $a \in A$ och $b \in B$.

$$\implies A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}.$$

Övning 1.2

Låt $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ och $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Bestäm mängden.

a) $A \cup B$

Mängden av alla element i A och B

$$\implies A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

b) $A \cap B$

Mängden av alla element som ligger både A och B

$$\implies A \cap B = \varnothing \quad \text{(tomma mängden)}.$$

c) $A \backslash B$
Då inga element ligger i både A och B ges

$$A \backslash B = A = \{1, 3, 5, 7, 9\}.$$

d) $A \times B$
Mängden av alla ordnade par

$$\Longrightarrow \; A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), ..., (9, 4), (9, 6), (9, 8), (9, 10)\}.$$

Övning 1.3

Låt $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ och $C = \{3, 4, 5\}$. Bestäm mängden.

a) $A \cup B \cup C$
Alla element som ligger i A, B och C

$$\Longrightarrow \; A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

b) $A \cap B \cap C$
De element som ligger i A, B, och C

$$\Longrightarrow \; A \cap B \cap C = \{3\}.$$

c) $(B \backslash A) \cap C$

$$(B \backslash A) \cap C = \{4\} \cap C = \{4\}.$$

d) $(A \times B) \times C$

$$(A \times B) \times C = \{(1, 2), ..., (3, 4)\} \times C = \{((1, 2), 3), ((1, 2), 4), ..., ((3, 4), 5)\}.$$

Övning 1.4

Låt $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ och $C = \{1, 2, 3, ..., 10\}$. Bestäm huruvida relationen är sann eller falsk.

a) $A \subset C$
Alla element i A ligger i C, och $A \neq C$. Relationen är sann.

b) $B \subseteq C$
Alla element i B ligger även i C. Relationen är sann.

c) $A \cup B \subset C$
Vi har att $A \cup B = C$, men relationen säger att det är en strikt delmängd. Relationen är falsk.

d) $A \cap B \subseteq C$
$A \cap B = \varnothing$, och $\varnothing$ (tomma mängden) är en delmängd av alla mängder. Relationen är sann.

Övning 1.5

Låt $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ och $C = \{1, 2, 3, ..., 10\}$. Bestäm antalet element i mängden.

a) $(A \cup B) \times C$

$A \cup B$ har 10 element, och C har 10 element. De blir alltså $10 \cdot 10$ ordnade par mellan mängderna, vilket är 100 element.

b) $(A \cap B) \times C$

Då $A \cap B = \varnothing$ blir det $0 \cdot 10$ ordnade par, och därmed 0 element.

c) $(A \times B) \times C$

$A \times B$ ger $5 \cdot 5 = 25$ ordnade par, vilket gör att $(A \times B) \times C$ blir $25 \cdot 10 = 250$ ordnade par.

d) $A \times (B \times C)$

Likt räkningarna i **c** får vi $5 \cdot (5 \cdot 10) = 250$ element.

Övning 1.6

Låt P, Q och R vara logiska utsagor med sanningsvärdena T, F respektive T. Bestäm sanningsvärdet för utsagan.

a) $P \wedge (Q \vee R)$

P	$\wedge$	$(Q$	$\vee$	$R)$
T	**T**	F	T	T

b) $(P \vee Q) \wedge R$

$(P$	$\vee$	$Q)$	$\wedge$	R
T	T	F	**T**	T

c) $\neg P \vee \neg(Q \vee R)$

$\neg$	P	$\vee$	$\neg$	$(Q$	$\vee$	$R)$
F	T	**F**	F	F	T	T

d) $\neg(P \vee \neg(Q \wedge R)) \wedge P$

$\neg$	$(P$	$\vee$	$\neg$	$(Q$	$\wedge$	$R))$	$\wedge$	P
F	T	T	T	F	F	T	**F**	T

Övning 1.7

Använd en sanningstabell för att bestämma huruvida den logiska utsagan är en tautologi (sann oavsett sanningsvärdena för P, Q och R).

a) $P \vee P \implies P$
En tautologi, eftersom

P	$\vee$	P	$\implies$	P
T	T	T	**T**	T
F	F	F	**T**	F

b) $\neg\neg P \Leftrightarrow P$
En tautologi, eftersom

$\neg$	$\neg$	P	$\Leftrightarrow$	P
T	F	T	**T**	T
F	T	F	**T**	F

c) $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q) \wedge R$
Ingen tautologi, ty om man låter $P = Q = \text{T}$ och $R = \text{F}$, så ges

P	$\vee$	$(Q$	$\wedge$	$R)$	$\Leftrightarrow$	$\neg$	$(\neg$	P	$\wedge$	$\neg$	$Q)$	$\wedge$	R
T	T	T	F	F	**F**	T	F	T	F	F	T	F	F

d) $(P \wedge \neg Q) \wedge R \Leftrightarrow (P \wedge R) \wedge \neg Q$
En tautologi, eftersom

$(P$	$\wedge$	$\neg$	$Q)$	$\wedge$	R	$\Leftrightarrow$	$(P$	$\wedge$	$R)$	$\wedge$	$\neg$	Q
T	F	F	T	F	T	**T**	T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F	**T**	T	F	F	F	F	T
T	T	T	F	T	T	**T**	T	T	T	T	T	F
T	T	T	F	F	F	**T**	T	F	F	F	T	F
F	F	F	T	F	T	**T**	F	F	T	F	F	T
F	F	F	T	F	F	**T**	F	F	F	F	F	T
F	F	T	F	F	T	**T**	F	F	T	F	T	F
F	F	T	F	F	F	**T**	F	F	F	F	T	F

Övning 1.8

Bestäm sanningsvärdet för den logiska utsagan.

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 1$
Låt $x = y - 1$. Detta visar att för godtyckligt $x \in \mathbb{R}$ så finns det ett $y \in \mathbb{R}$ så att $x + y = y - 1 + y = 1$.

Utsagan är alltså sann.

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R} : xy = 1$
Vi noterar att utsagan är falsk, ty om $x = 0 \in \mathbb{R}$, så finns det inget $y \in \mathbb{R}$ som uppfyller $x = 1/y$.

c) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R} : y^2 = x$
Notera att om $x < 0$, så finns det inget $y \in \mathbb{R}$ så att $y^2 = x$, då $y^2 \geq 0$ för alla $y \in \mathbb{R}$. Utsagan är falsk.

d) $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R} : xy = 0$
Utsagan är sann, ty vi kan alltid välja $y = 0$ oavsett val av $x \in \mathbb{R}$.

Övning 1.9

Bestäm sanningsvärdet för den logiska utsgan.

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R} : xy < |xy|$.
Utsagan är falsk, ty om $x = 0$ eller $y = 0$ så gäller $xy = |xy|$, men olikheten i fråga är strikt.

b) $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R} : 5x + y = 0$.
Utsagan är sann, då vi alltid kan välja $y = -5x$ för godtyckligt val av $x \in \mathbb{R}$.

c) $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R} : x^2 + 5x + y = 0$.
Om vi löser ekvationen får vi

$$x = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - y},$$

varav vi ser att om $y > \frac{25}{4}$, så finns inget reellt tal x som löser ekvationen. Utsagan är alltså falsk.

d) $\exists y \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ \forall z \in \mathbb{R} : (x + \pi)(y + \sqrt{2})z = 2z$.
Ekvationen är uppfylld för alla $z \in \mathbb{R}$ om det finns något val av $x \in \mathbb{R}$ och $y \in \mathbb{R}$ så att

$$(x + \pi)(y + \sqrt{2}) = 2.$$

Tag t.ex. $x = 2 - \pi$ och $y = 1 - \sqrt{2}$ så ges

$$(2 - \pi + \pi)(1 - \sqrt{2} + \sqrt{2}) = 2,$$

och därmed är utsagan sann.

Övning 1.10

Uttryck mängden matematiskt (med mängdnotation, logiska operatorer och kvantorer).

a) Alla positiva reella lösningar till ekvationen $x^5 - x + 1 = 0$.

$$\{x \in \mathbb{R} : x^5 - x + 1 = 0 \wedge x > 0\}, \qquad \text{alternativt} \qquad \{x \in \mathbb{R}_+ : x^5 - x + 1 = 0\}.$$

b) Alla reella tal som uppfyller $x = x^2$.

$$\{x \in \mathbb{R} : x = x^2\}.$$

c) Alla positiva udda tal, dvs talen 1,3,5,...

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k+1\}, \quad \text{alternativt} \quad \{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}.$$

d) Alla tvåpotenser, dvs talen 1,2,4,...

$$\{2^n : n \in \mathbb{N}\}, \quad \text{alternativt} \quad \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} : n = 2^k\}.$$

Övning 1.11

Bestäm alla heltalslösningar ($x \in \mathbb{Z}$) till ekvationen eller olikheten.

a) $|x+5| + |x-5| = 100$

1. $x > 5 \implies$

$$\begin{aligned} x + 5 + x - 5 = 100 &\implies \\ 2x = 100 &\implies \\ x = 50. \end{aligned}$$

2. $-5 < x < 5 \implies$

$$\begin{aligned} x + 5 - (x-5) = 100 &\implies \\ 10 \neq 100 &\implies \\ x \notin (-5, 5). \end{aligned}$$

3. $x < -5 \implies$

$$\begin{aligned} -(x+5) - (x-5) = 100 &\implies \\ -2x = 100 &\implies \\ x = -50. \end{aligned}$$

Svar: $x = \pm 50$.

b) $4x^2 - 9 < 0$

$$4x^2 - 9 < 0 \implies x^2 < \frac{9}{4} \implies |x| < \frac{3}{2},$$

vilket ger oss svaret

$$\{x \in \mathbb{Z} : |x| < 3/2\} = \{-1, 0, 1\}.$$

c) $|2x+1|/|2x-1| \leq 1$
Delar upp i tre olika fall:

1. $x > 1/2$:

$$\frac{2x+1}{2x-1} \leq 1 \implies 2x+1 \leq 2x-1 \implies 1 \leq -1,$$

vilket ej är rimligt, och därför $x \ngtr 1/2$.

2. $-1/2 < x < 1/2$:

$$\frac{2x+1}{1-2x} \leq 1 \implies 2x+1 \leq 1-2x \implies 4x \leq 0,$$

vilket gäller för $x = 0$ som är enda heltalet i intervallet.

3. $x < -1/2$:

$$\frac{-1-2x}{1-2x} \leq 1 \implies -1-2x \leq 1-2x \implies -1 \leq 1,$$

vilket gäller för alla x. Totalt ges alltså $x = 0, -1, -2, -3, ...$

d) $|x^2 + x| \geq x^2 + |x|$

1. $x \geq 0 \implies$

$$\begin{aligned} x^2 + x \geq x^2 + x &\implies \\ 0 \geq 0, &\quad \forall x \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

2. $-1 < x < 0 \implies$

$$\begin{aligned} -x^2 - x \geq x^2 - x &\implies \\ -x^2 \geq x^2 &\implies \\ -1 \ngeq 1 &\implies \\ x \notin (-1, 0)&. \end{aligned}$$

3. $x < -1 \implies$

$$\begin{aligned} x^2 + x \geq x^2 - x &\implies \\ x \geq -x &\implies \\ -|x| \ngeq |x| &\implies \\ x \notin (-\infty, -1)&. \end{aligned}$$

Svar: $x = 0, 1, 2, ...$

Övning 1.12

Bestäm alla rationella lösningar till ekvationen.

a) $x^5 = 1$

$$x^5 = 1 \implies x = \sqrt[5]{1} = 1.$$

b) $9(x-5)(x-7) = 280$

$$\begin{aligned} 9(x-5)(x-7) = 280 &\implies \\ 9(x^2 - 12x + 35) - 280 = 0 &\implies \\ x^2 - 12x + \frac{35}{9} = 0 &\implies \\ x = 6 \pm \sqrt{36 - \frac{35}{9}} &\implies \\ x = \frac{18 \pm 17}{3}. \end{aligned}$$

c) $9x^2 + 3x - 6 = 0$

$$9x^2 + 3x - 6 = 0 \implies x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = 0 \implies x = -\frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{24}{36}} = \frac{-1 \pm 5}{6}.$$

d) $\sqrt{x+1} + x = 5$

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} + x = 5 &\implies \\ x + 10(5-x)^2 &\implies \\ x + 1 = 25 - 10x + x^2 &\implies \\ 0 = x^2 - 11x + 24. \end{aligned}$$

Lösningen till den här ekvationen ges av

$$x = \frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{121}{4} - \frac{96}{4}} = \frac{11 \pm 5}{2},$$

alltså $x_1 = 3$ och $x_2 = 8$ (där x_2 är en falsk rot).

Övning 1.13

Bestäm alla rationella lösningar till olikheten.

a) $x^5 \leq 1$

Lösningen är mängden av alla rationella tal som uppfyller olikheten (dvs $x \leq 1$), alltså

$$\{x \in \mathbb{Q} : x \leq 1\}.$$

b) $9(x-5)(x-7) < 280$

Den här olikheten är uppfylld för alla x som ligger mellan rötterna till ekvationen i **Övning 12b**. Alltså

$$\{x \in \mathbb{Q} : 1/3 < x < 35/3\}.$$

c) $9x^2 + 3x - 6 \geq 0$

Vi ser att det är en andragradsekvationen med rötter i $x_1 = -1$ och $x_2 = 2/3$ (från **12c**). Mellan rötterna har vi att vänsterledet är mindre än 0 (kolla t.ex. $x = 0$), vilket betyder att på utsidan av rötterna kommer vänsterledet vara större än noll. Alltså

$$\{x \in \mathbb{Q} : x \leq -1 \vee x \geq 2/3\}.$$

d) $\sqrt{x+1} + x < 5$ Olikheten gäller för att $x < 3$ (roten som togs fram i **12d**). Vänsterledet är även odefinierat för $x < -1$, vilket ger

$$\{x \in \mathbb{Q} : -1 \leq x < 3\}.$$

Övning 1.14

Låt x, y och z vara rationella tal. Använd triangelolikheterna för att visa att olikheten är uppfylld eller visa att den inte är uppfylld (genom att hitta ett motexempel).

a) $|x+y| \leq |x-z| + |z-y|$
Lägg till och dra ifrån z (eftersom $0 = z - z$), så följer rakt av triangelolikheten att

$$|x-y| = |x-z+z-y| \leq |x-z| + |z-y|.$$

b) $|x-2y| \leq |x-z| + 2|z-y|$
Eftersom olikheten ska gälla för alla $x, y, z \in \mathbb{Q}$, ska den även gälla då $z = y$. Då har vi att olikheten

$$|x-2z| \leq |x-z|,$$

ska gälla. Men ta $x = 0$ så får vi att

$$|-2z| \leq |z| \Longleftarrow 2|z| \leq |z|,$$

vilket inte gäller för alla $z \in \mathbb{Q}$ (ta till exempel $z = 1$). Alltså gäller ej olikheten.

c) $|x-2y| \leq |x-2z| + 2|z-y|$
Här kan vi också använda knepet att lägga till och dra ifrån, denna gången $2z$. Med triangelolikheten får vi då

$$|x-2y| = |x-2z+2z-2y| \leq |x-2z| + |2z-2y| = |x-2z| + 2|z-y|.$$

d) $\big||x|-|y|\big| \leq |x-3y| + 4|y|$
Börja med omvända triangelolikheten. Dra sedan bort och lägg till för att använda vanliga triangelolikheten.

$$\big||x|-|y|\big| \leq |x-y| = |x-3y+3y+4| \leq |x-3y| + |3y+y| = |x-3y| + 4|y|.$$

Övning 1.15

Använd triangelolikheten för att uppskatta (bestämma en övre gräns för) uttrycket då $1/10 \leq x \leq 10$.

a) $x^3 - 1/x$

$$\left|x^3 - \frac{1}{x}\right| \leq |x^3| + |1/x| \leq \max_{x\in[\frac{1}{10},10]} |x^3| + \max_{x\in[\frac{1}{10},10]} |1/x| = 1000 + 10 = 1010.$$

b) $x^{-3} + x$

$$\left|x^{-3} + x\right| \leq |x^{-3}| + |x| \leq \max_{x\in[\frac{1}{10},10]} |x^{-3}| + \max_{x\in[\frac{1}{10},10]} |x| = 1000 + 10 = 1010.$$

c) $(x^2 - 9 + 3x)/(x+3)$

$$\begin{aligned}\left|\frac{x^2-9+3x}{x+3}\right| &\le \left|\frac{x^2}{x+3}\right| + \left|\frac{9}{x+3}\right| + \left|\frac{3x}{x+3}\right| \\ &\le \frac{\max_{x\in[\frac{1}{10},10]}|x^2|}{\min_{x\in[\frac{1}{10},10]}|x+3|} + \frac{\max_{x\in[\frac{1}{10},10]}|9|}{\min_{x\in[\frac{1}{10},10]}|x+3|} + \frac{\max_{x\in[\frac{1}{10},10]}|3x|}{\min_{x\in[\frac{1}{10},10]}|x+3|} \\ &= \frac{1000}{31} + \frac{90}{31} + \frac{300}{31} \\ &= \frac{1390}{31}.\end{aligned}$$

d) $(1/x + 2x)(x + 2/x)$

$$\begin{aligned}\left|\Big(\frac{1}{x}+2x\Big)\Big(x+\frac{2}{x}\Big)\right| = \left|1+\frac{2}{x^2}+2x^2+4\right| &\le |5| + |2x^2| + |2/x^2| \\ &\le \max_{x\in[\frac{1}{10},10]}|5| + \max_{x\in[\frac{1}{10},10]}|2x^2| + \frac{\max_{x\in[\frac{1}{10},10]}|2|}{\min_{x\in[\frac{1}{10},10]}|x^2|} \\ &= 5+200+200 \\ &= 405.\end{aligned}$$

Övning 1.16

Bestäm talföljdens gränsvärde.

a) $x_n = 3 - 5n/(6n+3)$

$$x_n = 3 - \frac{5n}{6n+3} = 3 - \frac{\frac{1}{n}5n}{\frac{1}{n}(6n+3)} = 3 - \frac{5}{6+\frac{3}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 3 - \frac{5}{6} = \frac{13}{6}.$$

b) $x_n = (3n^3 + 5n + 1)/(3n^2 + (n+1)(n^2+1))$

$$\frac{3n^3+5n+1}{3n^2+(n+1)(n^2+1)} = \frac{3n^3+5n+1}{n^3+4n^2+n+1} = \frac{n^3(3+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^3})}{n^3(1+\frac{4}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3})} \xrightarrow[n\to\infty]{} 3.$$

c) $x_n = (3-n)/|3-n|$

$$\begin{aligned}x_n = \frac{3-n}{|3-n|} = \{n>3\} = \frac{3-n}{-(3-n)} = -1, \quad \forall n > 3 \\ \implies x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -1.\end{aligned}$$

d) $x_n = (10x_{n-1} - (x_{n-1}^2 - 3))/10,\ x_0 = 1$

Vi har att när talföljden har konvergerat så kommer $x_n = x_{n-1}$ för nog stora n. Låt därför $x_n = x_{n-1}$, så ser vi att

$$10x_n = (10x_n - (x_n^2 - 3)) \implies x_n^2 - 3 = 0 \implies x_n = \pm\sqrt{3}.$$

Det positiva startvärdet ger att talföljden går till $\bar{x} = \sqrt{3}$.

Övning 1.17

Visa att talföljden är konvergent, dvs bestäm gränsvärdet $\bar{x}$ och $N = N(\varepsilon)$ så att $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$ för $n \geq N(\varepsilon)$.

a) $x_n = 1/(n+1)^2$

Noterar först att $x_n \to 0 =: \bar{x}$ då $n \to \infty$. För alla $n \geq N$ ser vi sen att

$$|x_n - \bar{x}| = \left| \frac{1}{(n+1)^2} - 0 \right| = \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{(N+1)^2}.$$

Vi vill alltså att

$$\frac{1}{(N+1)^2} < \varepsilon \implies \varepsilon^{-1} < (N+1)^2 \implies \sqrt{\varepsilon^{-1}} < N+1 \implies N > \varepsilon^{-1/2} - 1.$$

För att nu säkerställa att $N \in \mathbb{N}$ så måste vi avrunda $\varepsilon^{-1/2}$ upp till närmsta heltal, samt för att säkerställa att det gäller för alla $n \geq N$, behöver vi även lägga till 1. Vi får alltså

$$N(\varepsilon) = \lceil \varepsilon^{-1/2} \rceil.$$

b) $x_n = (n+1)/(n+2)$

Börjar med att notera gränsvärdet som

$$\bar{x} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} = 1.$$

Vi får då att

$$|x_n - \bar{x}| = \left| \frac{n+1}{n+2} - 1 \right| = \left| \frac{n+1-(n+2)}{n+2} \right| = \left| -\frac{1}{n+2} \right| = \frac{1}{n+2} < \varepsilon,$$

vilket vi kan skriva om som

$$n > \varepsilon^{-1} - 2.$$

Med samma argument som i **a**-uppgiften ges $N(\varepsilon)$ därmed av

$$N(\varepsilon) = \lceil \varepsilon^{-1} \rceil - 1.$$

c) $1/\sqrt{n}$

Gränsvärdet blir $\bar{x} = 0$, vilket då ger att

$$|x_n - \bar{x}| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \implies n > \varepsilon^{-2}.$$

Med samma argument som tidigare får vi då att

$$N(\varepsilon) = \lceil \varepsilon^{-2} \rceil + 1.$$

d) $x_0 = 0.3, x_1 = 0.33, x_2 = 0.333, ...$

Vi noterar att gränsvärdet går emot $\bar{x} = 1/3$, och sedan att

$$\begin{aligned}
\bar{x} - x_0 &= \frac{1}{3} - \frac{3}{10} = \frac{10-9}{30} = \frac{1}{30}, \\
\bar{x} - x_1 &= \bar{x} - \frac{3}{10} - \frac{3}{100} = \frac{1}{30} - \frac{3}{100} = \frac{1}{300}, \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
\bar{x} - x_n &= \frac{1}{3}\frac{1}{10^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Alltså får vi att

$$|\bar{x} - x_n| = \frac{1}{3}\frac{1}{10^{n+1}} < \varepsilon \implies 10^{n+1} > \frac{1}{3\varepsilon} \implies (n+1)\ln(10) > \ln((3\varepsilon)^{-1}) \implies n > \frac{\ln((3\varepsilon)^{-1})}{\ln(10)} - 1.$$

Av samma argument som tidigare deluppgifter, får vi därmed att

$$N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{\ln((3\varepsilon)^{-1})}{\ln(10)} \right\rceil.$$

Övning 1.18

Visa att talföljden är en Cauchy-följd, dvs bestäm $N = N(\varepsilon)$ så att $|x_n - x_m| < \varepsilon$ för $m, n \geq N(\varepsilon)$.

a) $x_n = 1/(n+1)^2$

Antag att $m > n$ (alternativt $n > m$ men med motsatta beräkningar), så att

$$\frac{1}{(m+1)^2} \leq \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Då får vi att

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(m+1)^2}\right| &\leq \left|\frac{1}{(n+1)^2}\right| + \left|\frac{1}{(m+1)^2}\right| \leq \left|\frac{1}{(n+1)^2}\right| + \left|\frac{1}{(n+1)^2}\right| \\
&= 2\left|\frac{1}{(n+1)^2}\right| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Detta ger att

$$n > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} - 1,$$

och av samma argument som i **Övning 1.17** vill vi därför ha

$$N(\varepsilon) = \left\lceil \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \right\rceil.$$

b) $x_n = (n+1)/(n+2)$

Antag $m > n$ så att

$$\frac{1}{m+2} < \frac{1}{n+2}.$$

Då får vi att

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| &= \left| \frac{n+1}{n+2} - \frac{m+1}{m+2} \right| \\
&= \left| \frac{n+1+1-1}{n+2} - \frac{m+1+1-1}{m+2} \right| \\
&= \left| \frac{n+2}{n+2} - \frac{1}{n+2} - \frac{m+2}{m+2} + \frac{1}{m+2} \right| \\
&\leq \left| \frac{1}{n+2} \right| + \left| \frac{1}{m+2} \right| \\
&\leq 2 \left| \frac{1}{n+2} \right| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Detta ger i sin tur att

$$n > \frac{2}{\varepsilon} - 2,$$

och av samma motivering som tidigare får vi att

$$N(\varepsilon) = \lceil 2\varepsilon^{-1} \rceil - 1.$$

c) $x_n = 1/\sqrt{n}$
Antag $m > n$ så att

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Då får vi att

$$\left| \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{m}} \right| \leq \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \right| + \left| \frac{1}{\sqrt{m}} \right| \leq 2 \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \right| < \varepsilon.$$

Detta ger i sin tur att

$$n > 4\varepsilon^{-2},$$

och därmed att

$$N(\varepsilon) = \lceil 4\varepsilon^{-2} \rceil + 1.$$

d) $x_0 = 0.3, x_1 = 0.33, x_2 = 0.333, ...$
Noterar att

$$x_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{3}{10^j}.$$

Låt $n > m$. Då får vi att

$$|x_n - x_m| = \left| \sum_{j=1}^{n} \frac{3}{10^j} - \sum_{j=1}^{m} \frac{3}{10^j} \right| = \left| \sum_{j=m+1}^{n} \frac{3}{10^j} \right| \leq \sum_{j=m+1}^{n} \left| \frac{3}{10^j} \right| \leq \left| \frac{3}{10^m} \right| < \varepsilon.$$

Detta ger att

$$m > \frac{\ln(3\varepsilon^{-1})}{\ln(10)}$$

och därmed ges $N(\varepsilon)$ av

$$N(\varepsilon) = \frac{\ln(3\varepsilon^{-1})}{\ln(10)} + 1.$$

Övning 1.19

Bestäm N så att $|x_n - \bar{x}| < 10^{-16}$ då $n \geq N$ för talföljden.

a) $x_n = 1/(n+1) + 1/(n+2)$

Noterar att $\bar{x} = 0$, och får då att

$$|x_n - \bar{x}| = \left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right| \leq \left|\frac{1}{n+1}\right| + \left|\frac{1}{n+2}\right| \leq 2\left|\frac{1}{n+1}\right| < 10^{-16},$$

vilket ger att

$$n > 2 \cdot 10^{16} - 1,$$

och därmed ges att

$$N = 2 \cdot 10^{16}.$$

b) $x_n = 1/(n+1) + 1/(n+2)^2$

Noterar att $\bar{x} = 0$, och får då att

$$|x_n - \bar{x}| = \left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+2)^2}\right| \leq \left|\frac{1}{n+1}\right| + \left|\frac{1}{(n+2)^2}\right| \leq 2\left|\frac{1}{n+1}\right| < 10^{-16},$$

vilket ger att

$$n > 2 \cdot 10^{16} - 1,$$

och därmed ges att

$$N = 2 \cdot 10^{16}.$$

c) $x_n = (1/2)^n$

Noterar att $\bar{x} = 0$ och att

$$|x_n - \bar{x}| = \frac{1}{2^n} < 10^{-16} \implies 2^n > 10^{16} \implies n > \frac{16\ln(10)}{\ln(2)},$$

och därmed har vi att

$$N = \left\lceil \frac{16\ln(10)}{\ln(2)} \right\rceil + 1.$$

d) $x_0 = 1, x_1 = x_0 + 1/2, x_2 = x_1 + 1/4, x_3 = x_2 + 1/8...$

Noterar att $\bar{x} = 2$ och får att

$$\begin{aligned}
\bar{x} - x_0 &= 1 \\
\bar{x} - x_1 &= 1/2 \\
\bar{x} - x_2 &= 1/4 \\
&. \\
&. \\
&. \\
\bar{x} - x_n &= 1/2^n.
\end{aligned}$$

Med identiska beräkningar som i föregående deluppgift ges därmed att

$$N = \left\lceil \frac{16\ln(10)}{\ln(2)} \right\rceil + 1.$$

Övning 1.20

Bestäm N så att $|x_m - x_n| < 10^{-16}$ då $m, n \geq N$ för Cauchy-följden.

a) $x_n = 1/(n+1) + 1/(n+2)$
Antag $m > n$. Då får vi att

$$\begin{aligned}|x_n - x_m| &= \left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2}\right| \\ &\leq \left|\frac{1}{n+1}\right| + \left|\frac{1}{n+2}\right| + \left|\frac{1}{m+1}\right| + \left|\frac{1}{m+2}\right| \\ &\leq 4\left|\frac{1}{n+1}\right| < 10^{-16}.\end{aligned}$$

Detta ger i sin tur att

$$n > 4 \cdot 10^{16} - 1,$$

och därmed har vi att

$$N = 4 \cdot 10^{16}.$$

b) $x_n = 1/(n+1) + 1/(n+2)^2$
Antag $m > n$. Då får vi att

$$\begin{aligned}|x_n - x_m| &= \left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{1}{m+1} - \frac{1}{(m+2)^2}\right| \\ &\leq \left|\frac{1}{n+1}\right| + \left|\frac{1}{(n+2)^2}\right| + \left|\frac{1}{m+1}\right| + \left|\frac{1}{(m+2)^2}\right| \\ &\leq 4\left|\frac{1}{n+1}\right| < 10^{-16}.\end{aligned}$$

Detta ger i sin tur att

$$n > 4 \cdot 10^{16} - 1,$$

och därmed har vi att

$$N = 4 \cdot 10^{16}.$$

c) $x_n = (1/2^n)$
Antag $m > n$. Då får vi att

$$|x_n - x_m| = \left|\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^m}\right| \leq \left|\frac{1}{2^n}\right| + \left|\frac{1}{2^m}\right| \leq 2\frac{1}{2^n} < 10^{-16}.$$

Detta ger i sin tur att

$$n > \frac{16\ln(10)}{\ln(2)} + 1,$$

vilket ger att

$$N = \left\lceil \frac{16\ln(10)}{\ln(2)} \right\rceil + 2.$$

d) $x_0 = 1, x_1 = x_0 + 1/2, x_2 = x_1 + 1/4, x_3 = x_2 + 1/8, ...$

Notera att

$$x_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2^j}.$$

Då ges (för $n > m$) att

$$|x_n - x_m| = \left| \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2^j} - \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{2^j} \right| = \left| \sum_{j=m+1}^{n} \frac{1}{2^j} \right| < \frac{1}{2^m} < 10^{-16},$$

vilket i sin tur ger att

$$m > \frac{16 \ln(10)}{\ln(2)}.$$

Alltså ges att

$$N = \left\lceil \frac{16 \ln(10)}{\ln(2)} \right\rceil + 1.$$

Övning 1.21

Bestäm huruvida talföljden representerar ett reellt tal. Dvs, kolla om taljföljden är en rationell Cauchy-följd.

Definition 0.1 (Rationell Cauchy-följd)**.** *En rationell Cauchy-följd är en rationell talföljd* $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ *sådan att*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+, \exists N \in \mathbb{N} : |x_n - x_m| < \varepsilon, \ \forall m, n \geq N.$$

a) 1,1,1,...
För alla m och n har vi att $x_n = x_m = 1 \in \mathbb{Q}_+$. Alltså får vi att

$$|x_n - x_m| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$$

för alla $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$. **Svar:** Ja.

b) 1,2,3,...
Vi har att $x_n = n \in \mathbb{Q}_+$ för alla n. Däremot om vi låter $\varepsilon = 1/2 \in \mathbb{Q}_+$, så ser vi att

$$\nexists N \in \mathbb{N} : |x_n - x_m| < \frac{1}{2}, \ \forall m, n \geq N.$$

Alltså är inte $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en Cauchy-följd. **Svar:** Nej.

c) $1, 1/2, 1/3, ...$
För alla m och n har vi att $x_m, x_n \in \mathbb{Q}_+$. Vi ser även att om vi antar $m > n$ så har vi att

$$|x_n - x_m| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \leq \left| \frac{1}{n} \right| + \left| \frac{1}{m} \right| \leq \frac{2}{n} < \varepsilon,$$

så länge vi låter $n \geq N$ där N ges av

$$N = \lceil 2\varepsilon^{-1} \rceil + 1.$$

Alltså representerar talföljden ett reellt tal (talet 0).

d) $\sqrt{2} + 1, \sqrt{2} + 1/2, \sqrt{2} + 1/3, ...$
För varje n har vi att $x_n = \sqrt{2} + 1/n \notin \mathbb{Q}_+$ (ingen rationell talföljd). **Svar:** Nej.

Övning 1.22

Ange en (annan) ekvivalent Cauchy-följd för talföljden.

a) $x_n = 1/(n+1) + 1/(n+2)$.
Ta t.ex. talföljden $y_n = 0, 0, 0, ...$ Då får vi att

$$|z_n| = |x_n - y_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

vilket visar att $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ är en ekvivalent Cauchy-följd.

b) $1/(n+1) - 1/(n+2)^2$
Ta godtycklig Cauchy-följd som konvergerar mot 0, t.ex. $y_n = \pi^{-n}$.

c) $(1/2)^n$
Ännu en gång är det bara att ta godtycklig Cauchy-följd som konvergerar mot 0, t.ex. $y_n = 1/\ln(n)$.

d) $x_0 = 1, x_1 = x_0 + 1/2, x_2 = x_1 + 1/4, x_3 = x_2 + 1/8, ...$
Ta en Cauchy-följd som konvergerar mot 2, t.ex.

$$y_n = \ln(e + 1/n)^2.$$

Övning 1.23

Låt $x = [(x_n)_{n=0}^{\infty}]$ och $y = [(y_n)_{n=0}^{\infty}]$ vara två reella tal givna av $x_n = 1 + 1/(n+1)$ och $y_n = 1 - 1/(n+1)$. Beräkna uttrycket med hjälp av definitionen av de algebraiska operationerna för reella tal.

a) $x + y = [(x_n)_{n=0}^{\infty}] + [(y_n)_{n=0}^{\infty}]$
Då $x = y = 1$ (gränsvärdet av dess Cauchy-följder) så vet vi att svaret ska vara 2. Detta ser vi även av att

$$x + y = [(x_n + y_n)_{n=0}^{\infty}] = [(2)_{n=0}^{\infty}] = 2.$$

b) $x - y = [(x_n)_{n=0}^{\infty}] - [(y_n)_{n=0}^{\infty}]$
Här vet vi att svaret ska bli 0. Detta ses av att

$$x - y = [(x_n - y_n)_{n=0}^{\infty}] = \left[\left(\frac{2}{n+1}\right)_{n=0}^{\infty}\right] = 0.$$

c) $xy = [(x_n)_{n=0}^{\infty}] \cdot [(y_n)_{n=0}^{\infty}]$

$$xy = [(x_n \cdot y_n)_{n=0}^{\infty}] = \left[\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)_{n=0}^{\infty}\right] = 1.$$

$x/y = [(x_n)_{n=0}^{\infty}]/[(\tilde{y}_n)_{n=0}^{\infty}]$

$$x/y = \left[\left(\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}}\right)_{n=0}^{\infty}\right] = \left[\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)_{n=0}^{\infty}\right] = 1.$$

Övning 1.24

Bestäm huruvida mängden är öppen, sluten eller ingetdera.

a) $\{1, 2, 3\}$
Komplementet till den här mängden är

$$(-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (3, \infty),$$

vilket är en union av öppna mängder, och därmed en öppen mängd. Det här medför att $\{1, 2, 3\}$ är en sluten mängd.

b) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 2\}$
Komplementet till den här mängden är

$$(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty),$$

vilket är en union av öppna mängder, och därmed en öppen mängd. Det här medför att mängden i fråga är sluten.

c) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$
På grund av den öppna delen till vänster och slutna delen till höger är mängden varken sluten eller öppen.

d) $\{x \in \mathbb{R} : 1 < 3x^2 + 4x < 2\}$
Då gränserna i mängden är strikta medför det att mängden är öppen.

Övning 1.25

Uttryck mängden som (en union av) intervall.

a) $\mathbb{R}$
Reella talen motsvaras av intervallet

$$(-\infty, \infty).$$

b) $\{x \in \mathbb{R} : x(x-1) < 1\}$
Notera att

$$x^2 - x - 1 = 0 \implies x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{4}} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

och vi ser att mellan de här rötterna (t.ex. för $x = 0$) så uppfylls olikheten. Vi kan därför se att mängden är intervallet

$$((1 - \sqrt{5})/2, (1 + \sqrt{5})/2).$$

c) $\{x \in \mathbb{R} : |x+1| + |x+2| > |x+3|\}$
För $x > -1$ får vi att

$$2x + 3 > x + 3 \implies 2x > x,$$

vilket gäller för alla $x > 0$. För $-2 < x < -1$ ges

$$-x - 1 + x + 2 > x + 3 \implies -2 > x,$$

men vi har antagit motsatta, så det gäller ej för $x \in (-1, -2)$. För $-3 < x < -2$ har vi

$$-2x - 3 > x + 3 \implies -3x > 6,$$

vilket stämmer för alla $x \in (-2, -3)$. För $x < -3$ har vi

$$-2x - 3 > -x - 3 \implies -3x > 0,$$

vilket stämmer för alla $x < -3$. Alltså får vi

$$(-\infty, 2) \cup (0, \infty).$$

d) $\{x \in \mathbb{R} : |x + 5| + |x - 5| > 10\}$
För $x > 5$ får vi

$$2x > 10,$$

vilket gäller för alla $x > 5$. För $-5 < x < 5$ får vi

$$x + 5 - x + 5 > 10,$$

vilket ej gäller. För $x < -5$ får vi

$$-x - 5 - x + 5 > 10 \implies -2x > 10,$$

vilket gäller för alla $x < -5$. Vi får alltså intervallet

$$(-\infty, -5) \cup (5, \infty).$$