TMV225
Kapitel 2

Övning 2.1

Utred injektivitet, surjektivitet, bijektivitet och existens av invers för funktionen $f : X \to Y$ då $f(x) = x^2$ för följande mängder X och Y.

a) $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}$

Då kodomänen för x^2 är $\mathcal{R}(x^2) = [0, \infty) \subset Y$ har vi att den ej är surjektiv. Funktionen är inte injektiv, ty om $x_1 = -x_2$ har vi att $x_1 \neq x_2$ men $f(x_1) = f(x_2)$ (se definitionen för injektivitet). Funktionen är bijektiv om den är injektiv och surjektiv, men då den är varken eller så är den ej bijektiv. En funktion har en invers om den är bijektiv, vilket den ej är. Det finns alltså ingen invers.

b) $X = \mathbb{R}, Y = [0, \infty)$

Av samma anledning som i **a**-uppgiften är funktionen inte injektiv. För att den ska vara surjektiv ska den uppfylla att

$$\forall y \in Y,\ \exists x \in X : f(x) = y.$$

För godtyckligt $y \in [0, \infty)$, låt $x = \sqrt{y}$. Då ges att

$$f(x) = (\sqrt{y})^2 = y,$$

och funktionen är alltså surjektiv. Ej bijektiv ty inte injektiv, och ej inverterbar ty ej bijektiv.

c) $X = [0, \infty), Y = \mathbb{R}$

Då vi nu ej kan välja negativa x_1 eller x_2 har vi att $f(x_1) \neq f(x_2)$ då $x_1 \neq x_2$ och alltså är f injektiv. Då det inte finns något $x \in [0, \infty)$ som kan ge att $f(x) = y$ för något $y < 0$ så är ej funktionen surjektiv. Funktionen är därmed inte bijektiv och därmed inte inverterbar.

d) $X = [0, \infty), Y = [0, \infty)$

Funktionen är injektiv av samma anledning som i **c**, och surjektiv av samma anledning som i **d**. Därmed är den bijektiv, och även inverterbar.

Övning 2.2

Ange (största) definitionsmängd ($\mathcal{D}(f)$) och värdemängd ($\mathcal{R}(f)$) för funktionen.

a) $f(x) = x^3$

Funktionen definierad för alla $x \in \mathbb{R}$ och kan anta alla värden i $\mathbb{R}$. Alltså

$$\mathcal{D}(f) = \mathcal{R}(f) = \mathbb{R}.$$

b) $f(x) = 1/x$

Funktionen definierad för alla $x \in \mathbb{R}$ utom $x = 0$ och kan anta alla värden i $\mathbb{R}$ utom 0. Alltså

$$\mathcal{D}(f) = \mathcal{R}(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

c) $f(x) = 1/x^2$

Funktionen definierad för alla $x \in \mathbb{R}$ utom $x = 0$ och kan anta alla positiva värden i $\mathbb{R}$ (ej inkluderat 0). Alltså

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}, \qquad \mathcal{R}(f) = \mathbb{R}_+.$$

c) $f(x) = \sqrt{x}$

Funktionen definierad för alla positiva $x \in \mathbb{R}$ samt $x = 0$ och kan anta alla positiva värden i $\mathbb{R}$ samt 0. Alltså

$$\mathcal{D}(f) = \mathcal{R}(f) = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}.$$

Övning 2.3

Visa att funktionen är bijektiv och bestäm inversen.

Per definition är en funktion bijektiv om den är injektiv och surjektiv. Vi ska alltså visa att funktionerna uppfyller följande definitioner.

Definition 0.1 (Injektiv funktion)**.** *En funktion $f : X \to Y$ är injektiv om*

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2).$$

Definition 0.2 (Surjektiv funktion)**.** *En funktion $f : X \to Y$ är surjektiv om*

$$\forall y \in Y,\ \exists x \in X : y = f(x).$$

a) $f(x) = x^5$

Vi ser att funktionen är injektiv, ty om $x_1 \neq x_2$ så gäller att

$$f(x_1) = x_1^5 \neq x_2^5 = f(x_2).$$

För att se att funktionen är surjektiv, låt $x = \sqrt[5]{y}$ för ett godtyckligt y. Då får vi att för alla $y \in Y$ att

$$f(x) = x^5 = (\sqrt[5]{y})^5 = y,$$

och därmed är funktionen bijektiv då den är både injektiv och surjektiv. För att hitta inversen ser vi att

$$y = x^5 \implies x = \sqrt[5]{y},$$

och har därmed att $f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x}$.

b) $f(x) = 1/x + 1$

Börjar med att undersöka injektivitet. Antag $x_1 \neq x_2$, men att $f(x_1) = f(x_2)$ (ska visa att detta ger en motsägelse vilket då medför att $f(x_1) \neq f(x_2)$). Då har vi att

$$\frac{1}{x_1} + 1 = \frac{1}{x_2} + 1 \implies x_1 = x_2,$$

men vi har antagit $x_1 \neq x_2$, vilket ger oss en motsägelse. Alltså är $f(x_1) \neq f(x_2)$ och funktionen injektiv. För godtyckligt y låter vi sedan $x = 1/(y-1)$. Då ser vi att funtionen är surjektiv ty

$$f(x) = \frac{1}{\frac{1}{y-1}} + 1 = y - 1 + 1 = y.$$

Därmed är funktionen bijektiv. Dess invers ges med samma metod som i **a**-uppgiften som $f^{-1}(x) = 1/(x-1)$.

c) $f(x) = \sqrt[3]{3 - x^2},\ x \geq 0$

Antag $x_1 \neq x_2$ men $f(x_1) = f(x_2)$. Då får vi att

$$\sqrt[3]{3 - x_1^2} = \sqrt[3]{3 - x_2^2} \implies 3 - x_1^2 = 3 - x_2^2 \implies |x_1| = |x_2|,$$

vilket blir en motsägelse eftersom $x_1 \neq x_2$ och $x \geq 0$ (om inte $x \geq 0$ skulle vi t.ex. kunna välja $x_1 = -x_2$). Motsägelsen medför att $f(x_1) \neq f(x_2)$ och därmed att f är injektiv. För varje y låt $x = \sqrt{3 - y^3}$. Då får vi att

$$f(x) = \sqrt[3]{3 - (\sqrt{3 - y^3})^2} = \sqrt[3]{3 - 3 + y^3} = y,$$

för alla $y \leq \sqrt[3]{3}$, och därmed surjektiv. Alltså är funktionen bijektiv. Med metoden i **a**-uppgiften ges att $f^{-1}(x) = \sqrt{3 - x^3}$.

d) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}/x,\ x < 0$

Antag $x_1 \neq x_2$ och $f(x_1) = f(x_2)$. Med lite räkning får vi att

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x_1^2 + 1}}{x_1} &= \frac{\sqrt{x_2^2 + 1}}{x_2} \implies \\
\frac{x_1^2 + 1}{x_1^2} &= \frac{x_2^2 + 1}{x_2^2} \implies \\
1 + \frac{1}{x_1^2} &= 1 + \frac{1}{x_2^2} \implies x_1 = x_2,
\end{aligned}$$

men vårt antagande att $x_1 \neq x_2$ ger en motsägelse, och alltså är då $f(x_1) \neq f(x_2)$, och f därmed injektiv. Funktionen är även surjektiv, ty för varje $y < -1$ kan vi sätta $x = -1/\sqrt{y^2 - 1}$, vilket då ger att

$$f(x) = -\sqrt{y^2 - 1}\sqrt{1 + \frac{1}{y^2 - 1}} = -\sqrt{y^2 - 1 + 1} = -|y| = y,$$

då $y < -1$ (eftersom $x < 0$). Funktionen är alltså bijektiv med invers $f^{-1}(x) = -1/\sqrt{x^2 - 1}$ $(x < -1)$.

Övning 2.4

Avgör huruvida funktionen är inverterbar för $X = Y = \mathbb{R}$.

Enligt sats 2.1 i kursboken har vi att en funktion är inverterbar om och endast om den är bijektiv. Vi ska alltså kolla om funktionen är injektiv och surjektiv (vilket medför att den är bijektiv).

a) $f(x) = x^3 - x$

Funktionen är injektiv om $x_1 \neq x_2$ medför att $f(x_1) \neq f(x_2)$, men om $x_1 = 0$ och $x_2 = 1$ ser vi att

$$f(x_1) = f(0) = 0 \quad \text{och} \quad f(x_2) = f(1) = 1^3 - 1 = 0,$$

vilket visar att $f(x_1) = f(x_2)$ trots att $x_1 \neq x_2$. Funktionen är alltså ej injektiv, och därmed ej bijektiv, och mer specifikt ej inverterbar.

b) $f(x) = x/(x^2 + 1)$

För att funktionen ska vara surjektiv krävs att för varje $y \in \mathbb{R}$ så finns $x \in \mathbb{R}$ så att $f(x) = y$. Men vi ser att

$$y = \frac{x}{x^2 + 1} \implies yx^2 - x + y = 0,$$

som är en andragradsekvation med lösning

$$x = \frac{1}{2y} \pm \sqrt{\frac{1}{4y^2} - 1}.$$

Från detta ser vi att för $y > 1/2$ blir uttrycket under kvadratroten negativt, och därmed finns inget $x \in \mathbb{R}$ som uppfyller $f(x) = y$ för godtyckligt $y > 1/2$. Funktionen är alltså inte surjektiv, och följaktligen ej bijektiv och ej inverterbar.

c) $f(x) = x^3/(x^2 + 1)$

Börjar med att kolla injektivitet. Först noteras att $f(x) \neq f(-x)$, så det räcker att undersöka för $x_1, x_2 \geq 0$. Antag sedan att $x_1 > x_2$. Då noteras att

$$f(x_1) = \frac{x_1^3}{x_1^2 + 1} = \underbrace{x_1}_{>x_2} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{x_1^2 + 1}\right)}_{>1 - \frac{1}{x_2^2+1}} > x_2 \left(1 - \frac{1}{x_2^2 + 1}\right) = \frac{x_2^3}{x_2^2 + 1} = f(x_2),$$

och därmed att $f(x_1) \neq f(x_2)$ då $x_1 \neq x_2$. Då $f(x)$ även kan anta varje värde i $\mathbb{R}$ har vi att f även är surjektiv. Sammanfattningsvis är alltså f bijektiv och därmed inverterbar.

d) $f(x) = x - |x - 1|$

Vi noterar att funktionen ej är injektiv, ty om vi exempelvis låter $x_1 = 5$ och $x_2 = 3$, så får vi

$$f(x_1) = 5 - |5 - 1| = 1 = 3 - |3 - 1| = f(3) = f(x_2).$$

Funktionen är alltså ej injektiv, och därmed ej bijektiv och specifikt ej inverterbar.

Övning 2.5

Funktionerna f och g ges av $f(x) = x + 1$ och $g(x) = (1 - x^2)/x$. Bestäm uttrycket.

a) $f + g$

$$f(x) + g(x) = x + 1 + \frac{1 - x^2}{x} = \frac{x^2 + x + 1 - x^2}{x} = \frac{x + 1}{x}.$$

b) f/g

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x + 1}{\frac{1-x^2}{x}} = \frac{x(x + 1)}{(1 - x)(1 + x)} = \frac{x}{1 - x}.$$

c) $f - g$

$$f(x) - g(x) = x + 1 - \frac{1 - x^2}{x} = \frac{x^2 + x - 1 + x^2}{x} = \frac{2x^2 + x - 1}{x}.$$

d) $f^2(x)g(x^2)$

$$f(f(x))g(x^2) = ((x + 1) + 1)\frac{1 - x^4}{x^2} = \frac{(x + 2)^2(1 - x^4)}{x}.$$

Övning 2.6

Funktionerna f och g ges av $f(x) = (x + 1)/x$ och $g(x) = x^3$.

a) $f \circ g$

$$f(g(x)) = \frac{x^3 + 1}{x^3}.$$

b) $g \circ f$

$$g(f(x)) = \left(\frac{x + 1}{x}\right)^3 = \frac{(x + 1)^3}{x^3} = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^3}.$$

c) $f \circ f$

$$f(f(x)) = \frac{\left(\frac{x+1}{x}\right) + 1}{\left(\frac{x+1}{x}\right)} = \frac{\frac{2x+1}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \frac{2x + 1}{x + 1}.$$

d) $f^{-1} \circ g$

Börjar med att notera att

$$y = \frac{x + 1}{x} \implies x = \frac{1}{y - 1},$$

och därmed har vi att $f^{-1}(x) = 1/(x - 1)$. Då ges att

$$f^{-1}(g(x)) = \frac{1}{x^3 - 1}.$$

Övning 2.7

Lös ekvationen.

a) $x^2 - 4 = 2x$

$$x^2 - 2x - 4 = 0 \implies x = 1 \pm \sqrt{1+4} \implies x = 1 \pm \sqrt{5}.$$

b) $4x^3 - 2x^2 = x$
Notera att $x = 0$ är en rot. Förkorta bort x så får vi resterande två rötter från

$$\begin{aligned} 4x^2 - 2x - 1 = 0 &\implies \\ x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0 &\implies \\ x = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{4}{16}} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}&. \end{aligned}$$

c) $x^4 - 4x^2 + 2 = 0$
Sätt $t = x^2$. Då ges

$$t^2 - 4t + 2 = 0 \implies t = 2 \pm \sqrt{4-2} \implies t = 2 \pm \sqrt{2},$$

vilket i sin tur ger att

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \pm\sqrt{2 - \sqrt{2}}, \\ x_{3,4} &= \pm\sqrt{2 + \sqrt{2}}. \end{aligned}$$

d) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$
Notera att $x = 1$ är en rot. Polynomdivision ger

$$\begin{array}{rr|r} - & x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 & x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \\ \cline{3-3} & x^4 - x^3 \phantom{{}+ 6x^2 - 4x + 1} & x - 1 \\ \cline{1-2} - & -3x^3 + 6x^2 - 4x + 1 & \\ & -3x^3 + 3x^2 \phantom{{}- 4x + 1} & \\ \cline{1-2} - & 3x^2 - 4x + 1 & \\ & 3x^2 - 3x \phantom{{}+ 1} & \\ \cline{1-2} - & -x + 1 & \\ & -x + 1 & \\ \cline{1-2} & 0 & \end{array}$$

Detta ger att vi kan skriva ekvationen som

$$(x-1)(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = (x-1)^4 = 0,$$

vilket ger $x = 1$ (multiplicitet 4).

Övning 2.8

Faktorisera polynomet så långt som möjligt.

a) $x^3 - x^2 - 2x + 2$

Notera att $x = 1$ är en rot. Polynomdivision ger

$$\begin{array}{rr|l}
 & x^3 - x^2 - 2x + 2 & x^2 - 2 \\ \cline{3-3}
- & x^3 - x^2 \phantom{{}- 2x + 2} & x - 1 \\ \cline{2-2}
 & -2x + 2 & \\
- & -2x + 2 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

Alltså är $x = \pm\sqrt{2}$ de resterande rötterna, och vi får att polynomet kan faktoriseras som

$$(x-1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}).$$

b) $x^2 + 2x + 5$

Vi sätter polynomet till att vara lika med 0 och får rötterna

$$x = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm \sqrt{-4} = -1 \pm 2i,$$

och därmed kan polynomet faktoriseras som

$$(x + 1 - 2i)(x + 1 + 2i).$$

c) $x^3 + 12x^2 + 48x + 64$

Notera att $x = -4$ är en rot. Polynomdivision ger

$$\begin{array}{rr|r}
 & x^3 + 12x^2 + 48x + 64 & x^2 + 8x + 16 \\ \cline{3-3}
- & x^3 + 4x^2 \phantom{{}+ 48x + 64} & x + 4 \\ \cline{2-2}
 & 8x^2 + 48x + 64 & \\
- & 8x^2 + 32x \phantom{{}+ 64} & \\ \cline{2-2}
 & 16x + 64 & \\
- & 16x + 64 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

De faktoriserade polynomet ger en ytterliggare rot $x = 4$ (multiplicitet 2). Vi kan alltså skriva polynomet som

$$(x+4)^3.$$

d) $4x^3 + 8x^2 - 4$

Vi börjar med att skriva polynomet som

$$4(x^3 + 2x^2 - 1),$$

varav vi ser att $x = -1$ är en rot. Polynomdivision ger

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
- & x^3 & +2x^2 & & -1 & x^2+x-1 \\
\cline{6-6}
 & x^3 & +\ x^2 & & & x+1 \\
\cline{1-5}
 & - & x^2 & & -1 & \\
 & & x^2 & +x & & \\
\cline{1-5}
 & & - & -x & -1 & \\
 & & & -x & -1 & \\
\cline{1-5}
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

där vi i det nya polynomet finner två nya rötter givna av

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{4}} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

och därmed kan polynomet faktoriseras som

$$(x+1)(2x+1-\sqrt{5})(2x+1+\sqrt{5}).$$

Övning 2.9

Förenkla uttrycket.

a) $(\frac{1}{2})^2 2^3 2^{-1}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 2^3 2^{-1} = 2^{-2} 2^3 2^{-1} = 2^{-2+3-1} = 2^0 = 1.$$

b) $2^{3/2} 8^{1/2}$

$$2^{3/2} 8^{1/2} = 2^{3/2} (2^3)^{1/2} = 2^{3/2} 2^{3/2} = 2^3 = 8.$$

c) $(\frac{1}{2})^3 2^{5/2} + (\frac{1}{4})^{1/4}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 2^{5/2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{1/4} = 2^{-3} 2^{5/2} + (2^{-2})^{1/4} = 2^{-1/2} + 2^{-1/2} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

d) $(\frac{14}{13})^2 \frac{13^{-2}}{14} (\frac{14}{169})^{-2}$

$$\left(\frac{14}{13}\right)^2 \frac{13^{-2}}{14} \left(\frac{14}{169}\right)^{-2} = \frac{14^2}{13^2} \frac{13^{-2}}{14} \frac{14^{-2}}{13^{-4}} = \frac{1}{14}.$$

Övning 2.10

Lös ekvationen.

a) $4^{2x} = 2^{x-1}$

$$4^{2x} = 2^{x-1} \implies (2^2)^{2x} = 2^{x-1} \implies 4x = x - 1 \implies x = -\frac{1}{3}.$$

b) $x^3 = \sqrt{5x^2}$

Noterar att $x_1 = 0$ utgör en rot. Den andra roten (med multiplicitet 2) ges enligt

$$x^3 = \sqrt{5x^2} \implies x^2 = \sqrt{5} \implies x = 5^{1/4}.$$

c) $9^{3x} = 3^{x+1}(9^{-x})^2$

$$9^{3x} = 3^{x+1}(9^{-x})^2 \implies 3^{6x} = 3^{x+1-4x} \implies 3^{6x} = 3^{1-3x} \implies 9x = 1 \implies x = \frac{1}{9}.$$

d) $2^{2x}x^2 = \sqrt{4^{2x+1}}/2$

$$2^{2x}x^2 = \sqrt{4^{2x+1}}/2 \implies 2^{2x}x^2 = (2^{4x+2})^{1/2}2^{-1} \implies 2^{2x}x^2 = 2^{2x+1-1} \implies x^2 = 1 \implies x = \pm 1.$$

Övning 2.11

Förenkla uttrycket.

a) $\left(\frac{\exp(3)\exp(5)}{e^2}\right)^7$

$$\left(\frac{\exp(3)\exp(5)}{e^2}\right)^7 = (e^3e^5e^{-2})^7 = (e^6)^7 = e^{42}.$$

b) $\frac{\exp(-\frac{1}{3})\exp(2)^2}{\exp(\frac{8}{3})}$

$$\frac{\exp(-\frac{1}{3})\exp(2)^2}{\exp(\frac{8}{3})} = e^{-1/3}e^4e^{-8/3} = e^1 = e.$$

c) $\frac{\exp(2)}{\sqrt{\exp(6)}}e$

$$\frac{\exp(2)}{\sqrt{\exp(6)}}e = e^2e^{-6/2}e^1 = e^0 = 1.$$

d) $(\exp(k) - \exp(m)^2)(\exp(2m) + \exp(k))$

$$(\exp(k) - \exp(m)^2)(\exp(2m) + \exp(k)) = (e^k - e^{2m})(e^k + e^{2m}) = e^{2k} - e^{4m}.$$

Övning 2.12

Lös ekvationen.

a) $\frac{\exp(4x)}{\exp(4)} = \exp(x^2)$

$$e^{4x-4} = e^{x^2} \implies x^2 - 4x + 4 = 0 \implies x = 2 \pm \sqrt{4-4} \implies x = 2.$$

b) $\frac{\exp(x)^2}{\exp(x)} = \exp(\exp(0))$

$$\frac{\exp(x)^2}{\exp(x)} = \exp(\underbrace{\exp(0)}_{=1}) \implies e^{2x-x} = e \implies x = 1.$$

c) $(\frac{e^3}{x^4})^{-1/2} = \sqrt{\exp(1)}$

$$\left(\frac{e^3}{x^4}\right)^{-1/2} = \sqrt{\exp(1)} \implies e^{-3/2}x^2 = e^{1/2} \implies x^2 = e^2 \implies x = \pm e.$$

d) $2e^{9x} - (e^{5x})^2 = \frac{e^{(x+2)^2}}{e^{(x-2)^2}}$

$$\begin{aligned}
2e^{9x} - (e^{5x})^2 = \frac{e^{(x+2)^2}}{e^{(x-2)^2}} &\implies 2e^{9x} - e^{10x} = e^{x^2+4x+4-(x^2-4x+4)} \\
&\implies 2e^{9x} - e^{10x} = e^{8x} \\
&\implies 2e^{x} - e^{2x} = 1.
\end{aligned}$$

Låt nu $e^x = t$. Då har vi

$$t^2 - 2t + 1 = 0 \implies (t-1)^2 = 0 \implies t = 1,$$

vilket i sin tur ger $x = 0$.

Övning 2.13

Lös ekvationen (för x).

a) $e^{2x} + 3e^x = 4$

Låt $e^x = t$. Då får vi att

$$t^2 + 3t - 4 = 0 \implies t = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}} = \frac{-3 \pm 5}{2}.$$

Då $\mathcal{R}(e^x)$ ej innehåller negativa värden, ges att $e^x = 1$, vilket i sin tur ger $x = 0$.

b) $3e^{5x-1} + e^{4x} = 4e^{3x+1}$

$$\begin{aligned}
3e^{5x-1} + e^{4x} = 4e^{3x+1} &\implies \frac{3}{e}e^{5x} + e^{4x} = 4ee^{3x} \\
&\implies \frac{3}{e}e^{2x} + e^{x} - 4e = 0.
\end{aligned}$$

Låt $e^x = t$, vilket ger

$$t^2 + \frac{e}{3}t - \frac{4e^2}{3} = 0 \implies t = -\frac{e}{6} \pm \sqrt{\frac{e^2}{36} + \frac{48e^2}{36}} = \frac{-e \pm 7e}{6}.$$

Då $\mathcal{R}(e^x)$ inte innehåller negativa värden, så har vi att $e^x = e$, och därmed $x = 1$.

c) $2e^x = e + \sqrt{e^{x+1}}$

$$2e^x = e + \sqrt{e^{x+1}} \implies 2e^x - \sqrt{e}e^{x/2} - e = 0.$$

Låt $e^{x/2} = t$. Då får vi

$$t^2 - \frac{\sqrt{e}}{2}t - \frac{e}{2} = 0 \implies t = \frac{\sqrt{e}}{4} \pm \sqrt{\frac{e}{16} + \frac{8e}{16}} = \frac{\sqrt{e} \pm 3\sqrt{e}}{4}.$$

Då $\mathcal{R}(e^{x/2})$ ej innehåller negativa värden noterar vi att $e^{x/2} = e^{1/2}$, och därmed $x = 1$.

d) $e^2 - 2e^{mx+1} = -e^{2mx}$

Låt $e^{mx} = t$. Då får vi

$$t^2 - 2et + e^2 = 0 \implies t = e \pm \sqrt{e^2 - e^2} = e,$$

vilket ger att $e^{mx} = e$ och därmed att $x = 1/m$.

Övning 2.14

Förenkla uttrycket.

a) $\log_3 81$

$$\log_3 81 = \{3^x = 81 \implies x = 4\} = 4.$$

b) $\log_5(\frac{1}{25})$

$$\log_5(\frac{1}{25}) = \{5^x = 5^{-2} \implies x = -2\} = -2.$$

c) $\log_4(\frac{1}{32})$

$$\log_4(\frac{1}{32}) = \{4^x = 2^{-5} \implies 2^{2x} = 2^{-5} \implies x = -5/2\} = -5/2.$$

d) $\log_2(8\sqrt{2})$

$$\log_4(\frac{1}{32}) = \{2^x = 2^3 2^{1/2} \implies 2^x = 2^{7/2} \implies x = 7/2\} = 7/2.$$

Övning 2.15

Förenkla uttrycket.

a) $3^{-\log_3(1/5)}$

$$3^{-\log_3(1/5)} = \frac{1}{3^{\log_3(1/5)}} = \frac{1}{1/5} = 5.$$

b) $\ln(\frac{1}{e^{5x}})$

$$\ln\left(\frac{1}{e^{5x}}\right) = \ln(e^{-5x}) = -5x.$$

c) $\log_6(\frac{1}{4}) + \log_6(\frac{1}{9})$

$$\log_6\left(\frac{1}{4}\right) + \log_6\left(\frac{1}{9}\right) = \log_6\left(\frac{1}{36}\right) = -2.$$

d) $4\log_6 3 - 2\log_6 9$

$$4\log_6 3 - 2\log_6 9 = \log_6\left(\frac{3^4}{9^2}\right) = \log_6(1) = 0.$$

Övning 2.16

Invertera funktionen.

a) $f(x) = 3^{5x+1}$

$$y = 3^{5x+1} \implies \log_3(y) = 5x + 1 \implies x = \frac{\log_3(y) - 1}{5}.$$

Inversen ges därmed av $f^{-1}(x) = (\log_3(x) - 1)/5$ för $x > 0$.

b) $g(x) = 4(1 - \ln(\sqrt{x})),\ x > 0$

$$y = 4(1 - \ln(\sqrt{x})) \implies \ln(\sqrt{x}) = 1 - \frac{y}{4} \implies \sqrt{x} = e^{1-y/4} \implies x = e^{2-y/2}$$

Inversen ges därmed av $g^{-1}(x) = e^{2-x/2}$.

c) $h(x) = \ln(x^4) - 2\ln(2x),\ x > 0$

$$y = \ln(x^4) - 2\ln(2x) \implies y = \ln(\frac{x^4}{4x^2}) \implies e^y = \frac{x^2}{4} \implies x = 2e^{y/2}.$$

Inversen ges därmed av $h^{-1}(x) = 2e^{x/2}$.

d) $i(x) = \log_k(k\log_m(x^m)),\ x > 0$

$$y = \log_k(k\log_m(x^m)) \implies k^y = k\log_m(x^m) \implies k^{y-1} = \log_m(x^m) \implies x = m^{k^{y-1}/m}$$

Inversen ges därmed av $i^{-1}(x) = m^{k^{x-1}/m}$.

Övning 2.17

Lös ekvationen (för x).

a) $e^{2x} = 4 - e$

Låt $e^x = t$. Då fås

$$t^2 + e - 4 = 0 \implies t = \pm\sqrt{e-4}.$$

Alltså ges $x = \ln(\sqrt{e-4})$.

b) $\ln(ax + a) = a$

$$\ln(ax + a) = a \implies ax + a = e^a \implies x = \frac{e^a - a}{a}.$$

c) $2\log_{10}(-x) = 1 + 2\log_4(8)$

$$2\log_{10}(-x) = 1 + 2\log_4(8) \implies \log_{10}(-x) = \frac{1+3}{2} \implies x = -10^2 = -100.$$

d) $\ln(3) + \ln(x) + \ln(x-2)^2 = \ln(4) + 3\ln(x-1)$

$$
\begin{aligned}
\ln(3) + \ln(x) + \ln(x-2)^2 = \ln(4) + 3\ln(x-1) &\implies \\
\ln(3x(x-2)^2) = \ln(4(x-1)^3) &\implies \\
3x(x^2-4x+4) = 4(x^3-3x^2+3x-1) &\implies \\
3x^3 - 12x^2 + 12x = 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4 &\implies \\
x^3 - 4 = 0 \implies x = \sqrt[3]{4}.
\end{aligned}
$$

Övning 2.18

Bestäm funktionens värdemängd.

a) $f(x) = \exp(\tan(x))$
Eftersom $\mathcal{R}(\tan(x)) = \mathbb{R}$ ges $\mathcal{R}(\exp(\tan(x))) = (0, \infty)$.

b) $g(x) = \sin(\pi/(3-1/x)),\ x > 1$
Eftersom $\mathcal{R}(\pi/(3-1/x)) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ för $x > 1$ ges $\mathcal{R}(\sin(\pi/(3-1/x))) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$.

c) $h(x) = \exp(\sin(\pi x))$
Då $\mathcal{R}(\sin(\pi x)) = [-1, 1]$ får vi att $\mathcal{R}(\exp(\sin(\pi x))) = [e^{-1}, e^{1}]$.

d) $i(x) = \ln(\sin(\pi + \exp(3/x)))$
Eftersom $\mathcal{R}(\exp(3/x)) = (1, \infty)$, så har vi $\mathcal{R}(\sin(\pi+\exp(3/x))) = [-1, 1]$, men då $\ln(x)$ är odefinierad för $x < 0$ blir definitionsmängden $(0, 1)$ och därmed $\mathcal{R}(\ln(\sin(\pi + \exp(3/x)))) = (-\infty, 0)$.

Övning 2.19

Bestäm uttryckets exakta värde.

a) $\cos(\frac{2\pi}{3})$

$$\cos\left(2\frac{\pi}{3}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}.$$

b) $\sin(\frac{5\pi}{12})$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

c) $\cos(\frac{13\pi}{12})$

$$\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{13\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{-7\pi}{12}\right) = -\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

d) $\sin(\frac{\pi}{8})$

Notera att $\sin(\frac{\pi}{8}) = \sin(\frac{1}{2}\frac{\pi}{4})$, så vi vill hitta ett uttryck för $\sin(\frac{x}{2})$. Använd additionsformel för cosinus och ser att

$$\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right),$$
$$\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

Subtraktion av leden ger att

$$2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1-\cos(x) \implies \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}.$$

Stoppa in $x = \pi/4$ så får vi att

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Övning 2.20

Avgör huruvida uttrycket är en identitet.

a) $\sin(x) + \cos(x)\cot(x) = \frac{1}{\sin(x)}$

Vi ser att

$$\sin(x) + \cos(x)\cot(x) = \frac{1}{\sin(x)} \implies \sin^2(x) + \sin(x)\cos(x)\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = 1 \implies \sin^2(x)+\cos^2(x) = 1,$$

vilket är en identitet.

b) $\sin(x)\cos(x) = \frac{\sin(4x)}{4\cos(2x)}$

$$\begin{aligned}
\sin(x)\cos(x) &= \frac{\sin(4x)}{4\cos(2x)} \implies \\
\sin(x)\cos(x) &= \frac{2\sin(2x)\cos(2x)}{4\cos(2x)} \implies \\
4\sin(x)\cos(x) &= 2\sin(2x) \implies \\
2\sin(2x) &= 2\sin(2x).
\end{aligned}$$

Uttrycket är alltså en identitet.

c) $\tan(2x) = 2\sin(x)(2\sin^2(x)+1)$

Notera att $x \to \frac{\pi}{2}$ medför att vänsterledet går mot ∞ medan högerledet går mot

$$\lim_{x\to\pi/2} 2\sin(x)(2\sin^2(x)+1) = 2\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\frac{1}{2}+1\right) = 2\sqrt{2},$$

vilket visar att det ej är en identitet.

d) $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$

$$\begin{aligned} \sin(3x) &= 3\sin(x) - 4\sin^3(x) \implies \\ \sin(2x)\cos(x) + \cos(2x)\sin(x) &= 3\sin(x) - 4\sin(x)(1-\cos^2(x)) \implies \\ 2\sin(x)\cos^2(x) + \sin(x)\cos^2(x) - \sin(x)\sin^2(x) &= -\sin(x) + 4\sin(x)\cos^2(x) \implies \\ -\sin(x)\underbrace{(\sin^2(x)+\cos^2(x))}_{=1} &= -\sin(x), \end{aligned}$$

vilket visar att det är en identitet.

Övning 2.21

Lös ekvationen.

a) $\tan(\frac{x}{2}) = \sqrt{3}$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{3} \implies \frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} + \pi n \implies x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

b) $\sin(10x)\cos(3x) = 0$

Dela upp i två fall, där $\sin(10x_1) = 0$ och $\cos(3x_2) = 0$, vilket ger

$$\begin{aligned} 10x_1 &= \pi n \implies x_1 = \frac{\pi n}{10},\ n \in \mathbb{Z}, \\ 3x_2 &= \frac{\pi}{2} + \pi n \implies x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

c) $\cos(x^2) = 1$

$$\cos(x^2) = 1 \implies x^2 = 2\pi n \implies x = \pm\sqrt{2\pi n},\ n \in \mathbb{Z}.$$

d) $2\sin^2(x) + \cos(2x) + \sin(x) = 1$

$$\begin{aligned} 2\sin^2(x) + \cos(2x) + \sin(x) &= 1 \implies \\ 2\sin^2(x) + \cos^2(x) - \sin^2(x) + \sin(x) &= 1 \implies \\ \sin^2(x) + \cos^2(x) + \sin(x) &= 1 \implies \\ \sin(x) &= 0 \implies \\ x &= \pi n,\ n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Övning 2.22

Bestäm uttryckets exakta värde.

a) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}.$$

b) $\arctan(\sqrt{3})$

$$\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}.$$

c) $\arccos(1)$

$$\arccos(1) = 0.$$

d) $\arctan(-1)$

$$\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Övning 2.23

Bestäm uttryckets exakta värde.

a) $\sin(\arcsin(-0.2))$

$$\sin(\arcsin(-0.2)) = -0.2.$$

b) $\arccos(\cos(\frac{3\pi}{2}))$

$$\arccos(\cos(3\pi/2)) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}.$$

c) $\tan(\arctan(12))$

$$\tan(\arctan(12)) = 12$$

d) $\arccos(\cos(99\pi))$

$$\arccos(\cos(99\pi)) = \arccos(\cos(99\pi - 98\pi)) = \arccos(\cos(\pi)) = \arccos(-1) = \pi.$$

Övning 2.24

Bestäm uttryckets exakta värde.

a) $\tan(\cos^{-1}(0.5))$

$$\tan(\cos^{-1}(1/2)) = \tan(\pi/3) = \sqrt{3}.$$

b) $\sin(\cos^{-1}(0.8))$

Börjar med att härleda ett uttryck för $\sin(\arccos(x))$. Vi har identiteten

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1.$$

Låt $\theta = \arccos(x)$ ($x \in [-1, 1]$ och $\theta \in [0, \pi]$). Detta ger

$$\sin^2(\arccos(x)) + x^2 = 1 \implies \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Låt $x = 0.8$ så får vi

$$\sin(\cos^{-1}(0.8)) = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}.$$

c) $\tan(\cos^{-1}(-0.6))$

$$\tan(\cos^{-1}(-0.6)) = \frac{\sin(\arccos(-0.6))}{\cos(\arccos(-0.6))} = \frac{\sqrt{1 - \frac{9}{25}}}{-3/5} = -\frac{4/5}{3/5} = -\frac{4}{3}.$$

d) $\tan(\sin^{-1}(0.27))$

$$\tan(\sin^{-1}(0.27)) = \frac{\sin(\arcsin(0.27))}{\cos(\arcsin(0.27))} = \frac{0.27}{\sqrt{1 - \frac{27^2}{100^2}}} = \frac{0.27}{\sqrt{\frac{10000-729}{10000}}} = \frac{27}{\sqrt{9271}}.$$

Övning 2.25

Bestäm uttryckets exakta värde.

a) $\arcsin(\cos(50°))$

$$\arcsin(\cos(50°)) = \arcsin(\sin(40°)) = 40°.$$

b) $\arccos(\sin(-150°))$

$$\arccos(\sin(-150°)) = \arccos(\cos(90° - (-150°))) = \arccos(\cos(240°)) = \arccos(\cos(120°)) = 120°.$$

c) $\cos(\arcsin(\cos(30°)))$

$$\cos(\arcsin(\cos(30°))) = \cos(60°) = \frac{1}{2}.$$

d) $\arccos(\sin(\arccos(-\frac{1}{2})))$

$$\arccos(\sin(\arccos(-1/2))) = \arccos(\sqrt{1 - 1/4}) = \arccos(\sqrt{3}/2) = 30°.$$