TMV225
Kapitel 3

Övning 3.1

Bestäm gränsvärdet och bestäm δ som funktion av ε.

a) $\lim_{x\to 3}[x^2 - 3x + 5]$

Vi har givet att $\bar{x} = 3$, och då funktionen är kontinuerlig får vi gränsvärdet $\bar{y} = 5$ genom att stoppa in $\bar{x}$. Per definition vill vi hitta $\delta(\varepsilon)$ så att

$$|x - \bar{x}| < \delta(\varepsilon) \implies |f(x) - \bar{y}| < \varepsilon.$$

Det vill säga, vi börjar med antagandet att $|x - 3| < \delta$ (med andra ord att $x \in (3 - \delta, 3 + \delta)$), samt att $\delta < 1$ (δ är litet). Då ser vi att

$$|f(x) - 5| = |x^2 - 3x| = |x(x-3)| \leq |x| \cdot |x - 3| < (\delta + 3)\delta \leq 4\delta = \varepsilon.$$

Här ser vi att $\delta = \varepsilon/4$ uppfyller olikheten. Alltså kan vi låta

$$\delta(\varepsilon) = \min(1, \varepsilon/4).$$

b) $\lim_{x\to 3} \frac{x+3}{x+11}$

Funktionen är kontinuerlig i punkten $\bar{x} = 3$, och därmed är gränsvärdet $\bar{y} = 3/7$ (ges av att stoppa in $\bar{x}$). Låt $x = \bar{x} + \Delta x$ och se hur stor Δx får vara:

$$\begin{aligned} |f(\bar{x} + \Delta x) - \bar{y}| &= \left| \frac{(3 + \Delta x) + 3}{(3 + \Delta x) + 11} - \frac{3}{7} \right| = \left| \frac{6 + \Delta x}{14 + \Delta x} - \frac{3}{7} \right| = \left| \frac{7(6 + \Delta x) - 3(14 + \Delta x)}{7(14 + \Delta x)} \right| \\ &= \left| \frac{42 + 7\Delta x - 42 - 3\Delta x}{7(14 + \Delta x)} \right|. \end{aligned}$$

Här gör vi antagandet att $|\Delta x| < 1$, vilket då ger att $14 + \Delta x > 13$, och därmed

$$|f(\bar{x} + \Delta x) - \bar{y}| = \left| \frac{42 + 7\Delta x - 42 - 3\Delta x}{7(14 + \Delta x)} \right| < \left| \frac{4\Delta x}{7 \cdot 13} \right| = \left| \frac{4\Delta x}{91} \right|.$$

Detta är i sin tur mindre än ε om $|\Delta x| < 91\varepsilon/4$, vilket ger oss

$$\delta(\varepsilon) = \min(1, 91\varepsilon/4).$$

c) $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$
Notera omskrivningen

$$\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x}+2}.$$

Gränsvärdet för den här funktionen är $\bar{y} = \frac{1}{4}$. För att bestämma $\delta(\varepsilon)$ låter vi $x = \bar{x} + \Delta x$, och ser att (med antagandet $|\Delta x| < 1$)

$$\begin{aligned}|f(x)-\bar{y}| &= \left|\frac{1}{\sqrt{4+\Delta x}+2} - \frac{1}{4}\right| = \left|\frac{4-\sqrt{4+\Delta x}-2}{4(\sqrt{4+\Delta x}+2)}\right| = \left|\frac{2-\sqrt{4+\Delta x}}{4(\sqrt{4+\Delta x}+2)}\right| < \left|\frac{2-\sqrt{4+\Delta x}}{4(\sqrt{3}+2)}\right| \\ &= \left|\frac{(2-\sqrt{4+\Delta x})(2+\sqrt{4+\Delta x})}{4(\sqrt{3}+2)(2+\sqrt{4+\Delta x})}\right| = \left|\frac{4-4-\Delta x}{4(\sqrt{3}+2)(2+\sqrt{4+\Delta x})}\right| < \left|\frac{\Delta x}{4(\sqrt{3}+2)^2}\right|\end{aligned}$$

Detta är i sin tur mindre än ε när $|\Delta x| < 4(\sqrt{3}+2)^2\varepsilon$. Alltså

$$\delta(\varepsilon) = \min(1, 4(\sqrt{3}+2)^2\varepsilon).$$

d) $\lim_{x\to\pi} \frac{(x-\pi)^3}{\pi x}$
Funktionen är kontinuerlig i $\bar{x} = \pi$, så genom att stoppa in $\bar{x}$ får vi gränsvärdet $\bar{y} = 0$. Vi skriver $x = \bar{x} + \Delta x = \pi + \Delta x$ och ser att (med antagandet $|\Delta x| < 1$)

$$|f(x)-\bar{y}| = \left|\frac{((\pi+\Delta x)-\pi)^3}{\pi(\pi+\Delta x)}\right| = \left|\frac{(\Delta x)^3}{\pi(\pi+\Delta x)}\right| < \left|\frac{\Delta x}{\pi(\pi-1)}\right|,$$

vilket i sin tur är mindre än ε när $|\Delta x| < \pi(\pi-1)\varepsilon$, och därmed har vi att

$$\delta(\varepsilon) = \min(1, \pi(\pi-1)\varepsilon).$$

Övning 3.2

Bestäm gränsvärdet och bestäm δ som funktion av ε.

a) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x+2}$
Notera omskrivningen

$$\frac{x^3+8}{x+2} = \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)} = x^2-2x+4.$$

När vi nu låter $x \to -2$ får vi gränsvärdet $\bar{y} = 12$. Låt $x = -2 + \Delta x$ och vi ser att (med $|\Delta x| < 1$)

$$|f(x)-\bar{y}| = |(\Delta x-2)^2 - 2(\Delta x-2)+4| = |(\Delta x)^2 - 6\Delta x + 12 - 12| = |\Delta x|\cdot|\Delta x - 6| < 7|\Delta x|,$$

vilket är mindre än ε när $|\Delta x| < \varepsilon/7$, och vi får därmed att

$$\delta(\varepsilon) = \min(1, \varepsilon/7).$$

b) $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-8x+16}{x^2-16}$ Notera omskrivningen

$$\frac{x^2-8x+16}{x^2-16} = \frac{(x-4)^2}{(x-4)(x+4)} = \frac{x-4}{x+4},$$

vilket ger oss gränsvärdet $\bar{y} = 0$. Skriv nu $x = 4 + \Delta x$ och vi får att (med $|\Delta x| < 1$)

$$|f(x) - \bar{y}| = \left|\frac{(4 + \Delta x) - 4}{(4 + \Delta x) + 4}\right| = \left|\frac{\Delta x}{8 + \Delta x}\right| < \frac{|\Delta x|}{7},$$

vilket i sin tur är mindre än ε när $|\Delta x| < 7\varepsilon$, och därmed får vi att

$$\delta(\varepsilon) = \min(1, 7\varepsilon).$$

c) $\lim_{x \to 3} \left[\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9}\right]$
Notera omskrivningen

$$\left[\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9}\right] = \left[\frac{x+3}{(x-3)(x+3)} - \frac{6}{x^2-9}\right] = \frac{x+3-6}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{x+3},$$

vilket ger att vi får gränsvärdet $\bar{y} = 1/6$. Skriv nu $x = 3 + \Delta x$ och vi får att (med $|\Delta x| < 1$)

$$|f(x) - \bar{y}| = \left|\frac{1}{(3 + \Delta x) + 3} - \frac{1}{6}\right| = \left|\frac{6 - (6 + \Delta x)}{6(\Delta x + 6)}\right| = \left|\frac{\Delta x}{6(\Delta x + 6)}\right| < \frac{|\Delta x|}{30},$$

vilket i sin tur är mindre än ε när $|\Delta x| < 30\varepsilon$, och därmed får vi att

$$\delta(\varepsilon) = \min(1, 30\varepsilon).$$

d) $\lim_{x \to 1} \frac{x - 4\sqrt{x} + 3}{x^2 - 1}$
Notera omskrivningen

$$\frac{x - 4\sqrt{x} + 3}{x^2 - 1} = \frac{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} - 1)}{(x+1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x} - 3}{(x+1)(\sqrt{x}+1)}$$

vilket ger att vi får gränsvärdet $\bar{y} = -1/2$. Vi ser sen att

$$\begin{aligned} |f(x) - \bar{y}| &= \left|\frac{\sqrt{x} - 3}{(x+1)(\sqrt{x}+1)} + \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2\sqrt{x} - 6 + (x+1)(\sqrt{x}+1)}{2(x+1)(\sqrt{x}+1)}\right| \\ &= \left|\frac{(\sqrt{x} - 1)(x + 2\sqrt{x} + 5)}{2(x+1)(\sqrt{x}+1)}\right| = \left|\frac{(x-1)(x + 2\sqrt{x} + 5)}{2(x+1)(\sqrt{x}+1)^2}.\right| \end{aligned}$$

Låt nu $x = 1 + \Delta x$ och antag $|\Delta x| < 1$ för att få

$$\left|\frac{(x-1)(x + 2\sqrt{x} + 5)}{2(x+1)(\sqrt{x}+1)^2}.\right| = \left|\frac{\Delta x(\Delta x + 2\sqrt{\Delta x + 1} + 6)}{2(\Delta x + 2)(\sqrt{\Delta x + 1} + 1)^2}\right| \leq |\Delta x| \left|\frac{1 + 2\sqrt{2} + 6}{2}\right| = \frac{7 + 2\sqrt{2}}{2}|\Delta x|,$$

vilket i sin tur är mindre än ε då $|\Delta x| < \frac{2\varepsilon}{7 + 2\sqrt{2}}$, och därmed har vi att

$$\delta(\varepsilon) = \min\left(1, \frac{2\varepsilon}{7 + 2\sqrt{2}}\right).$$

Övning 3.3

Bestäm (om möjligt) gränsvärdet.

a) $\lim_{x\to k-} \frac{|x-k|}{x^2-k^2}$
Eftersom x närmar sig k från vänster, vet vi att $x < k$ och därmed att

$$\frac{|x-k|}{x^2-k^2} = -\frac{(x-k)}{(x+k)(x-k)} = -\frac{1}{x+k} \xrightarrow[x\to k-]{} -\frac{1}{2k}.$$

b) $\lim_{x\to k+} \frac{|x-k|}{x^2-k^2}$
Eftersom x närmar sig k från höger, vet vi att $x > k$ och därmed att

$$\frac{|x-k|}{x^2-k^2} = \frac{(x-k)}{(x+k)(x-k)} = \frac{1}{x+k} \xrightarrow[x\to k+]{} \frac{1}{2k}.$$

c) $\lim_{x\to 2} \frac{(x+2)^2-(x-2)^2}{x}$
Funktionen kan skrivas om så vi ser att

$$\frac{(x+2)^2-(x-2)^2}{x} = \frac{x^2+4x+4-x^2+4x-4}{x} = 8 \xrightarrow[x\to 2]{} 8.$$

Alternativt noterar vi att funktionen är kontinuerlig i $x = 2$ och genom att stoppa in värdet får vi att

$$\left.\frac{(x+2)^2-(x-2)^2}{x}\right|_{x=2} = \frac{16}{2} = 8.$$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{|4x-2|-|7x+2|}{x}$
När $x \to 0$ ser vi att $4x-2 < 0$ och $7x+2 > 0$, vilket ger oss

$$\lim_{x\to 0} \frac{|4x-2|-|7x+2|}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2-4x-7x+2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-11x}{x} = \lim_{x\to 0} -11 = -11.$$

Övning 3.4

Bestäm (om möjligt) gränsvärdet.

a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{\sqrt{x+7}-3}$
Multiplicera med nämnarens konjugat och vi får att

$$\frac{x^2-4}{\sqrt{x+7}-3} = \frac{(x^2-4)(\sqrt{x+7}+3)}{x+7-9} = \frac{(x+2)(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}{x-2} = (x+2)(\sqrt{x+7}+3),$$

vilket går mot 24 när $x \to 2$.

b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x^3-1}$
Uttnytja konjugatregel, samt att $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+b^2+ab)$ och se att

$$\frac{x^4-1}{x^3-1} = \frac{(x+1)(x-1)(x^2+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{(x+1)(x^2+1)}{(x^2+x+1)} \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{4}{3}.$$

c) $\lim_{x\to 3} \frac{1}{9-x^2}$
Vi ser här att vänstergränsvärdet blir

$$\lim_{x\to 3-} \frac{1}{9-x^2} = \infty,$$

medan om vi tar högergränsvärdet får vi

$$\lim_{x\to 3+} \frac{1}{9-x^2} = -\infty.$$

För att gränsvärdet i en punkt $\bar{x}$ ska existera, så ska dess höger- och vänstergränsvärde vara densamma. Gränsvärdet existerar alltså inte.

d) $\lim_{x\to 3+} \frac{\sqrt{4x^2-24x+36}}{x-3}$
Vi får att

$$\frac{\sqrt{4x^2-24x+36}}{x-3} = \frac{2\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3} = \frac{2\sqrt{(x-3)^2}}{x-3} = 2 \xrightarrow[x\to 3+]{} 2.$$

Övning 3.5

Givet $\lim_{x\to a} f(x) = 3$ och $\lim_{x\to a} g(x) = -5$, bestäm gränsvärdet.

a) $\lim_{x\to a}(f(x)+4)$

$$\lim_{x\to a}(f(x)+4) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} 4 = 3+4 = 7.$$

b) $\lim_{x\to a}(f(x)(g(x))^2)$

$$\lim_{x\to a}(f(x)(g(x))^2) = \lim_{x\to a}(f(x)) \lim_{x\to a}(g(x)) \lim_{x\to a}(g(x)) = 3\cdot(-5)\cdot(-5) = 75.$$

c) $\lim_{x\to a} \frac{3g(x)+6}{f(x)}$

$$\lim_{x\to a} \frac{3g(x)+6}{f(x)} = 3\frac{\lim_{x\to a} g(x)}{\lim_{x\to a} f(x)} + \frac{6}{\lim_{x\to a} f(x)} = \frac{3\cdot(-5)}{3} + \frac{6}{3} = -3.$$

d) $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a}(f(x)) + \lim_{x\to a}(g(x)) = 3-5 = -2.$$

Övning 3.6

Avgör huruvida funktionen är kontinuerlig eller diskontinuerlig på intervallet I.

a) $f(x) = \frac{1}{x+2},\ I = [-5, 5]$
Eftersom höger- och vänstergränsvärde skiljer i punkten $x = -2 \in I$, så är ej funktionen kontinuerlig där, och därmed diskontinuerlig på intervallet.

b) $f(x) = \frac{1}{x+2},\ I = \mathcal{D}(f)$
Definitionsmängden för funktionen är $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$, och eftersom $x = -2$ är enda punkten f är

diskontinuerlig i, så är den kontinuerlig över hela I eftersom $-2 \notin I$.

c) $f(x) = x^4 + \pi x^3 - (12x+3)^2 + 3 + x, \; I = [-10, 100]$

Vardera term i $f(x)$ är kontinuerlig på intervallet, och eftersom en summa av kontinuerliga funktioner är kontinuerlig så är hela $f(x)$ det.

d) $f(x) = \frac{1}{\sin(x)}, \; I = (0, \pi)$

Funktionen är diskontinuerlig i $x = 0$ och $x = \pi$, men då $0 \notin I$ och $\pi \notin I$ så är funktionen kontinuerlig.

Övning 3.7

Avgör huruvida funktionen är kontinuerlig eller diskontinuerlig (på sin definitionsmängd).

a)

$$f(x) = \begin{cases} -x+1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x+1, & x > 0. \end{cases}$$

Funktionen är kontinuerlig för $x < 0$ och för $x > 0$, så det återstår att se om funktionen är kontinuerlig på punkten $x = 0$. Dock ser vi att

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0+} f(x) = 1,$$

men f(0)=0, vilket visar att funktionen inte uppfyller definitionen för kontinuitet. Funktionen är alltså diskontinuerlig.

b)

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x), & x < \pi/4, \\ \frac{\pi \cos(x)}{4x}, & x \geq \pi/4. \end{cases}$$

Funktionen är kontinuerlig för $x < \pi/4$ och $x > \pi/4$. Det gäller endast att kolla så att vänstergränsvärdet blir samma som högergränsvärdet, vilket vi ser genom

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}-} \sin(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(= \frac{\pi \cos(\pi/4)}{\pi/4} \right).$$

Funktionen är alltså kontinuerlig.

c)

$$f(x) = \begin{cases} 4^{x^2}, & x < 1, \\ x^2 + 5x - 2, & x \geq 1. \end{cases}$$

Funktionen är kontinuerlig på båda sidor av $x = 1$, så återstår att kolla vänstergränsvärdet av $f(x)$ då $x \to 1$. Vi får att

$$\lim_{x \to 1-} 4^{x^2} = 4 \left(= 1^2 + 5 \cdot 1 - 2 \right).$$

Funktionen är alltså kontinuerlig.

d)

$$f(x) = \frac{x^3(x-5)^2}{x-5}, \quad x \neq 5.$$

Funktionen är odefinierad i punkten $x = 5$, och kontinuerlig överallt annars. Då vi har att $x \neq 5$, har vi därför att funktionen är kontinuerlig.

Övning 3.8

Finn de punkter där funktionen är diskontinuerlig.

a) $\tan(3x)$

De punkter där vänster- och högergränsvärde skiljer sig för funktionen $\tan(x)$ är i $\pi/2+\pi n$ för $n \in \mathbb{Z}$ eftersom

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \tan(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} \tan(x) = -\infty.$$

Vi får alltså att $\tan(3x)$ är diskontinuerlig då

$$3x = \pi/2 + \pi n \implies x = \frac{1}{3}(\pi/2 + \pi n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

b) $\frac{(x+10)^2}{(x+1)(x-5)}$

Funktionens höger- och vänstergränsvärde skiljer sig i punkterna $x = -1$ och $x = 5$ (där gränsvärdena blir antingen ∞ eller $-\infty$ beroende på om man går från vänster eller höger).

c) $\sin(\frac{4}{x+3})$

Funktionen $\sin(1/x)$ är kontinuerlig på $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Alltså får vi

$$x + 3 = 0 \implies x = -3.$$

d) $\frac{\tan(x)}{x^2-1}$

Täljaren ger de diskontinuerliga punkterna $x = \pi/2 + \pi n$ för $n \in \mathbb{Z}$, men funktionen är även diskontinuerlig i nämnarens nollställen, dvs $x = \pm 1$.

Övning 3.9

Bestäm konstanten a så att funktionen blir diskontinuerlig i punkten $\bar{x}$.

a) $f(x) = \frac{x+3}{x-a}$, $\bar{x} = 7$

Låt a vara sådan att nämnaren går mot 0 då $x \to \bar{x}$, dvs $a = 7$.

b) $f(x) = \frac{x+a^3}{x^2-4ax+4a^2}$, $\bar{x} = 5$

Vi skriver om enligt

$$\frac{x+a^3}{x^2-4ax+4a^2} = \frac{x+a^3}{(x-2a)^2},$$

och noterar att nämnaren går mot 0 (vilket kommer ge olika höger- och vänstergränsvärden) då $x \to 2a$. Låt alltså $a = \bar{x}/2 = 5/2$.

c) $f(x) = \frac{3\sin(x)}{a\cos(x)}, \; \bar{x} = (n + \frac{1}{2})\pi$

Notera att $\bar{x}$ är lösningen till ekvationen $\cos(x) = 0$. Vi kan därför låta a vara godtyckligt reellt tal, alltså är funktionen diskontinuerlig för alla $a \in \mathbb{R}$.

d) $f(x) = \frac{3\sin((4-a)x)}{\cos(ax)}, \; \bar{x} = \frac{1}{4}(2n+1)\pi$

Vi löser ekvationen

$$\cos(a\bar{x}) = 0 \implies a\bar{x} = \frac{\pi}{2} + \pi n \implies a\left(\frac{1}{4}(2n+1)\pi\right) = \frac{\pi}{2}(1+2n),$$

vilket är uppfyllt för $a = 2$.

Övning 3.10

Bestäm på vilka intervall funktionen är kontinuerlig.

a) $\frac{\sqrt{x-3}}{x-4}$ Funktionen är ej definierad för $x < 3$ på grund av täljaren. Samtidigt blir höger- och vänstergränsvärdet olika på grund av nämnaren i $x = 4$. Funktionen är alltså kontinuerlig på intervallet

$$[3,4) \cup (4,\infty).$$

b) $\frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-1}$

Vi har att

$$\frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-1} = \frac{|x-3|}{x-1}.$$

Här är täljaren kontinuerlig för alla $x \in \mathbb{R}$, men nämnaren ger en diskontinuitet i punkten $x = 1$. Intervallen där funktionen är kontinuerlig är alltså

$$(-\infty,1) \cup (1,\infty).$$

c) $\frac{1}{x^3-3x^2-x+3}$

Börjar med att lösa ekvationen

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0.$$

Lösningarna ges av $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$. Funktionen blir alltså diskontinuerlig i dessa punkter, och därmed ges intervallet funktionen är kontinuerlig på av

$$(-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,3) \cup (3,\infty).$$

d) $\ln(\sin(x))$

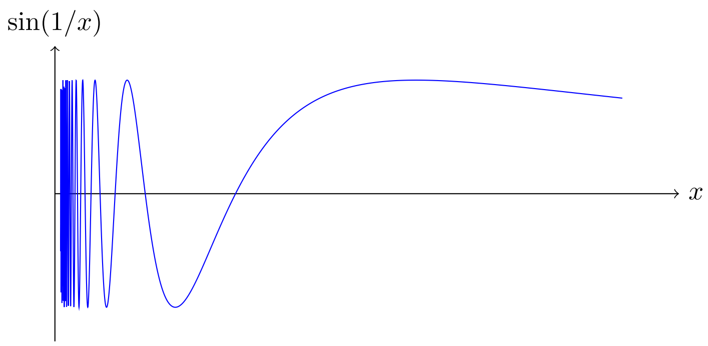
Notera att logaritmen inte får ta ett negativt argument, så vi får undersöka när $\sin(x) > 0$, vilket är för $x \in (2\pi n, 2\pi n + \pi)$ $(n \in \mathbb{Z})$, vilket även motsvarar det intervall funktionen är kontinuerlig på.

Övning 3.11

Avgör huruvida funktionen är likformigt kontinuerlig.

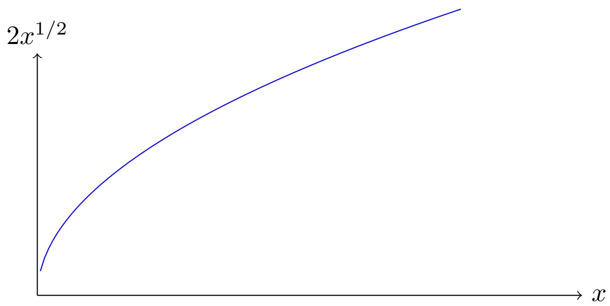
a) $f(x) = \sin(1/x)$

I figuren nedan är funktionens beteende när x närmar sig 0. En likformigt kontinuerlig funktion beter sig sådant att en ändring Δy i funktionsvärdet kan göras liten för en tillräckligt liten ändring Δx i argumentet. Då $x \to 0$ ser vi dock att funktionsvärdet börjar svänga oändligt snabbt, vilket gör att vi inte kan uppfylla detta krav nära 0. Funktionen är alltså inte likformigt kontinuerlig.



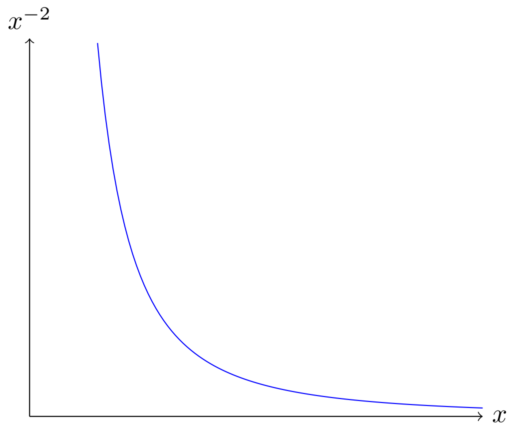
b) $f(x) = 2x^{1/2}$

I figuren nedan är funktionens beteende skissat. En likformigt kontinuerlig funktion beter sig sådant att en ändring Δy i funktionsvärdet kan göras liten för en tillräckligt liten ändring Δx i argumentet. För den här funktionen sker inga drastiska ändringar, varken nära 0 eller när x blir stor. Funktionen är alltså likformigt kontinuerlig.



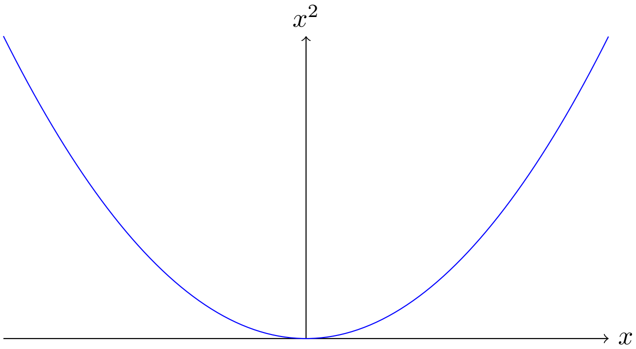
c) $f(x) = x^{-2}$

I figuren nedan är funktionens beteende skissat när x börjar närma sig 0. En likformigt kontinuerlig funktion beter sig sådant att en ändring Δy i funktionsvärdet kan göras liten för en tillräckligt liten ändring Δx i argumentet. För den här funktionen ser vi att när x går mot 0 så går funktionen kraftigt mot ∞. Detta medför att funktionen inte är likformigt kontinuerligt, ty en liten ändring i x-led kommer ge en drastisk ändring i y-led.



d) $f(x) = x^2$

I figuren nedan är funktionens beteende skissat när x börjar närma sig 0. En likformigt kontinuerlig funktion beter sig sådant att en ändring Δy i funktionsvärdet kan göras liten för en tillräckligt liten ändring Δx i argumentet. I det här fallet ser vi att funktionen ökar mer och mer ju större x blir, och därav kommer vi för nog stort x inte kunna uppfylla likformig kontinuitet.

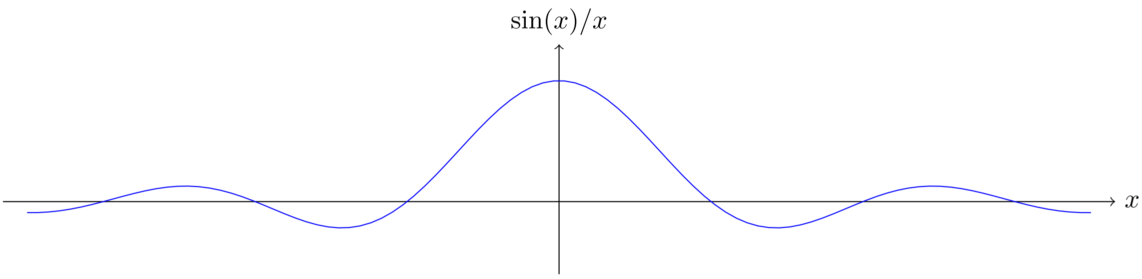


Övning 3.12

Avgör huruvida funktionen är likformigt kontinuerlig.

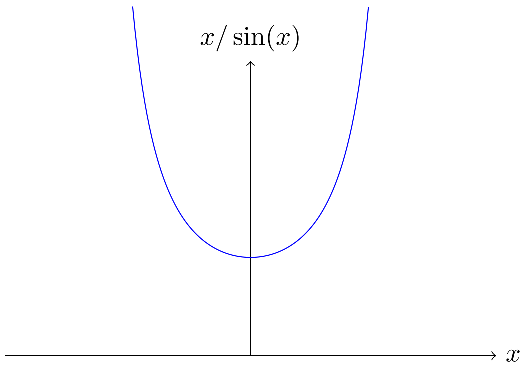
a) $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

I figuren nedan är funktionens beteende skissat över ett symmetriskt intervall. En likformigt kontinuerlig funktion beter sig sådant att en ändring Δy i funktionsvärdet kan göras liten för en tillräckligt liten ändring Δx i argumentet. I det här fallet ser vi att funktionen beter sig väldigt snyggt över hela $\mathbb{R}$ med ingen punkt där funktionsvärdet sticker iväg. Funktionen är alltså likformigt kontinuerlig.



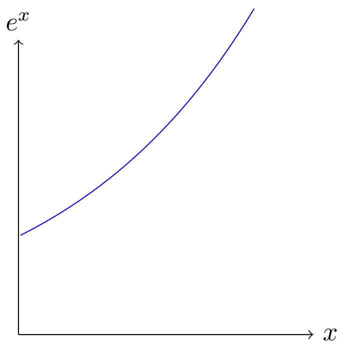
b) $f(x) = \frac{x}{\sin(x)}$

I figuren nedan är funktionens beteende skissat över ett symmetriskt intervall. En likformigt kontinuerlig funktion beter sig sådant att en ändring Δy i funktionsvärdet kan göras liten för en tillräckligt liten ändring Δx i argumentet. I det här fallet ser vi att funktionen har punkter där den sticker iväg snabbt mot ∞ (i lösningarna till $\sin(x) = 0$). Funktionen är alltså inte likformigt kontinuerlig.



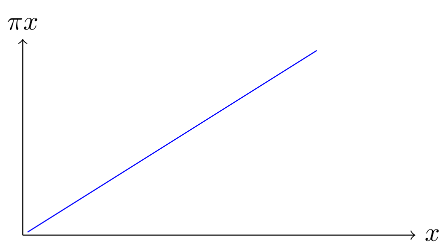
c) e^x

I figuren nedan är funktionens beteende skissad. En likformigt kontinuerlig funktion beter sig sådant att en ändring Δy i funktionsvärdet kan göras liten för en tillräckligt liten ändring Δx i argumentet. I figuren ser vi att e^x tidigt går mot ∞ i exponentiell fart. Detta medför att när x blir större kommer vi i en liten ändring Δx få en drastisk ändring Δy i funktionsvärdet.



d) $e^{\ln(\pi x)}$

Börjar med att notera att $e^{\ln(\pi x)} = \pi x$. I figuren nedan är funktionens beteende skissad. En likformigt kontinuerlig funktion beter sig sådant att en ändring Δy i funktionsvärdet kan göras liten för en tillräckligt liten ändring Δx i argumentet. För den här funktionen sker en linjär ökning i funktionsvärdet för alla x. Eftersom funktionen aldrig sticker iväg kan vi notera att den är likformigt kontinuerlig.



Övning 3.13

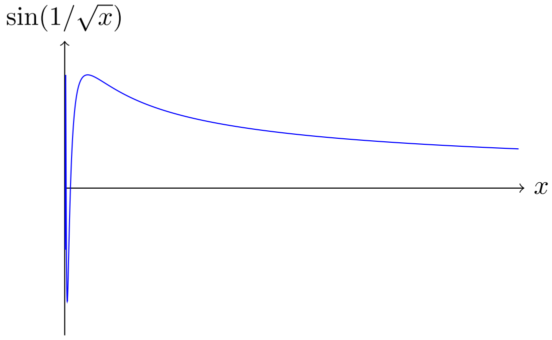
Avgör huruvida funktionen är likformigt kontinuerlig.

a) $f(x) = e^{2\ln(\pi x)}$

Notera att $f(x) = (\pi x)^2$, och eftersom vi sett i **Övning 3.11d** att x^2 inte är likformigt kontinuerlig, kommer heller ej den här funktionen vara det av samma anledning.

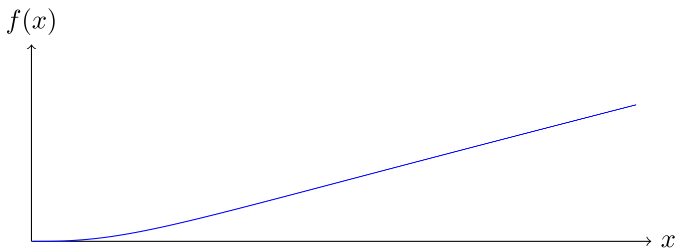
b) $f(x) = \sin(1/\sqrt{x})$

Nedan ser vi funktionen skissad. Av samma anledning som att $\sin(1/x)$ ej är likformigt kontinuerlig på grund av dess beteende nära $x = 0$, gäller även att $\sin(1/\sqrt{x})$ ej är det.



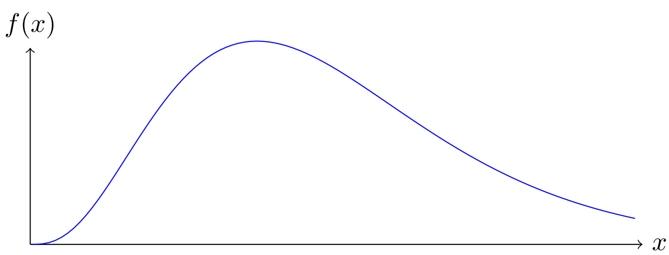
c) $f(x) = \frac{x^2}{4x+1+3/x}$

Funktionen är skissad i figuren nedan. Här ser vi att funktionens beteende nära $x = 0$ beter sig stillsamt, och när x blir stort ser vi att funktionen får ett linjärt asymptotiskt beteende. Funktionen är alltså likformigt kontinuerlig.



d) $f(x) = \frac{x^3}{e^x},\ x > 0$

Funktionen är skissad i figuren nedan. Här syns att på grund av exponentialfunktionen i nämnaren så kommer funktionen smidigt gå mot 0, och har ingen punkt där den sticker iväg. Funktionen är likformigt kontinuerlig.



Övning 3.14

Avgör huruvida funktionen är likformigt kontinuerlig.

a) $\frac{3}{x^2-4}$, $x > 3$

Då $x > 3$ kommer funktionen smidigt gå mot 0. Det som hade gjort funktionen icke likformigt kontinuerlig är vi studerat mindre värden på x så att nämnaren gjort att funktionen stuckit iväg mot ∞. Funktionen är alltså likformigt kontinuerlig.

b) $\frac{x^2-4}{3}$, $x > 3$

När x blir stor kommer funktionen växa snabbare och snabbare och därmed är funktionen är likformigt kontinuerlig (av samma anledning som att x^2 ej är).

c) $\sqrt{\frac{\ln(x)}{\sin(x)}}$, $x > 1$

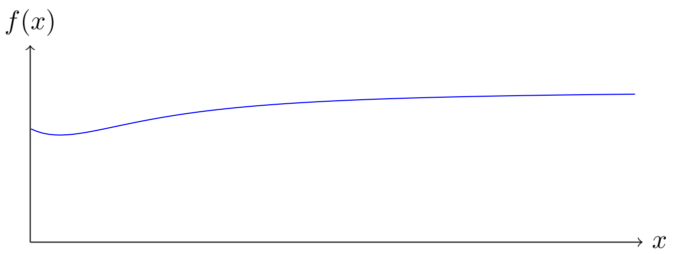
Funktionen kommer sticka iväg i de punkter när nämnaren går mot 0, och alltså är funktionen inte likformigt kontinuerlig.

d) $\frac{x^3+3x^2+2x+3}{x^3+3x^2+4x+4}$

Funktionen kan skrivas om enligt

$$\frac{x^3+3x^2+2x+3}{x^3+3x^2+4x+4} = \frac{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{4}{x^3}},$$

som kommer bli konstant då $x \to \infty$. Nära 0 ser vi i figuren nedan att funktionen inte sticker iväg (den går mot $\frac{3}{4}$), och därmed är den likformigt kontinuerlig.



Övning 3.15

Avgör huruvida funktionen är likformigt kontinuerlig.

a) $\frac{x^3+x}{x^4+2x^3+x^2+2x}$, $x > 0$

Vi kan förkorta bort ett x från funktionen. Sedan kan vi notera att $x = -2$ är en rot till nämnaren och skriva funktionen som

$$\frac{x^3+x}{x^4+2x^3+x^2+2x} = \frac{x^2+1}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{1}{x+2}.$$

Då vi endast kollar $x > 0$ är funktionen likformigt kontinuerlig.

b) $\frac{x^4+x}{x^5+2x^3+x^2+2x}$, $x > 0$

Förkorta bort ett x, så ser vi att när $x \to 0$ så går funktionens nämnare mot 2, och täljaren mot

0. Funktionen sticker alltså inte iväg nära 0, och då vi har högre grad på polynomet i nämnaren kommer funktionens värde gå mot 0 för större x. Funktionen är alltså likformigt kontinuerlig.

c) $\frac{x^3+x}{2x^3+x^2+2x}$, $x > 0$
Om vi förkortar bort ett x ser vi att funktionen inte sticker iväg vid $x = 0$, och då $x \to \infty$ kommer funktionen asymptotiskt växa linjärt, vilket betyder att funktionen är likformigt kontinuerlig.

d) $\frac{1}{\sin(\ln(x+1))}$, $x \neq 0$
Vi ser att när $x \to 0$ kommer $\ln(x+1) \to 0$, och totalt kommer nämnaren för funktionen gå mot 0. Funktionsvärdet kommer alltså sticka iväg mot ∞ då $x \to 0$, och därmed är funktionen ej likformigt kontinuerlig.

Övning 3.16

Bestäm om möjligt en Lipschitz-konstant på intervallet $[-10, 10]$ för funktionen genom att använda Lipschitz-konstantes definition.

a) $f(x) = kx + m$
Per definition är f Lipschitz-kontinuerlig med Lipschitz-kostant L_f om

$$|f(x) - f(y)| \leq L_f|x - y|, \quad \forall x, y \in I.$$

Vi noterar att

$$|f(x) - f(y)| = |kx + m - ky - m| = |k| \cdot |x - y| = L_f|x - y|,$$

och alltså $L_f = |k|$.

b) $f(x) = 5$
Vi får att

$$|f(x) - f(y)| = |5 - 5| = 0 \cdot |x - y| = L_f|x - y|,$$

och därmed $L_f = 0$.

c) $f(x) = 1/x$
Funktionen är ej likformigt kontinuerlig, och kan därmed ej heller vara Lipschitz-kontinuerlig, ty en Lipschitz-kontinuerlig funktion är alltid likformigt kontinuerlig.

d) $f(x) = |x|$
Använd omvända triangelolikheten och få att

$$|f(x) - f(y)| = ||x| - |y|| \leq |x - y| = L_f|x - y|,$$

och därmed är $L_f = 1$.

Övning 3.17

Bestäm (om möjligt) en Lipschitz-konstant för funktionen $f(x) = 3 + 2\sqrt{1 + |x|}$ på intervallet I genom att använda Lipschitz-konstantens definition.

Notera först att

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| &= |3+2\sqrt{1+|x|}-3-2\sqrt{1+|y|}| = 2|\sqrt{1+|x|}-\sqrt{1+|y|}| \\ &= 2\left|\frac{1+|x|-1-|y|}{\sqrt{1+|x|}+\sqrt{1+|y|}}\right| \leq 2\frac{|x-y|}{|\sqrt{1+|x|}+\sqrt{1+|y|}|} \\ &\leq \frac{2}{\min_{x,y\in I}|\sqrt{1+|x|}+\sqrt{1+|y|}|}|x-y|\end{aligned}$$

och alltså ges Lipschitz-konstanten av

$$L_f = \frac{2}{\min_{x,y\in I}|\sqrt{1+|x|}+\sqrt{1+|y|}|}.$$

Det räcker alltså att notera vilket intervall I vi har och minimera nämnaren för att få ut konstanten. Detta ger för respektive fall att:

a) $I=[1,2] \implies L_f = 2/(2\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2}$.

b) $I=[0,1] \implies L_f = 2/2 = 1$.

c) $I=[-1,0] \implies L_f = 2/2 = 1$.

d) $I=[-1,1] \implies L_f = 2/2 = 1$.

Övning 3.18

Bestäm den bästa möjliga Lipschitz-konstanten på intervallet $[-10,10]$ för funktionen genom att derivera. *Notera att Lipschitz-konstantens storlek ges av derivatans största absolutbelopp.*

Vi ska alltså få en olikhet på formen

$$|f(x)-f(y)| \leq \max_{\xi\in[-10,10]}|f'(\xi)||x-y|,$$

där maxvärdet på derivatan är Lipschitz-konstanten.

a) $f(x)=kx+m$

$$f'(x)=k \implies L_f = \max_{\xi\in[-10,10]}|k| = |k|$$

b) $f(x)=5$

$$f'(x)=0 \implies L_f = \max_{\xi\in[-10,10]} 0 = 0.$$

c) $f(x)=1/x$

Funktionen $1/x$ är ej Lipschitz-kontinuerlig på givna intervallet (ty ej likformigt kontinuerlig).

d) $f(x)=|x|$ För $x>0$ har vi $f'(x)=1$ och för $x<0$ har vi $f'(x)=-1$, och därmed

$$L_f = \max_{\xi\in[-10,10]}|f'(\xi)| = 1.$$

Övning 3.19

Bestäm den bästa möjliga Lipschitz-konstanten för funktionen $f(x) = 3 + 2\sqrt{1 + |x|}$ på intervallet I genom att derivera.

Börjar med att notera att

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+x}}, & \text{om } x > 0, \\ \frac{1}{\sqrt{1-x}}, & \text{om } x < 0. \end{cases}$$

a) $I = [1, 2]$

$$L_f = \max_{\xi \in [1,2]} \left| \frac{1}{\sqrt{1+\xi}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

b) $I = [0, 1]$

$$L_f = \max_{\xi \in [0,1]} \left| \frac{1}{\sqrt{1+\xi}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1.$$

c) $I = [-1, 0]$

$$L_f = \max_{\xi \in [-1,0]} \left| \frac{1}{\sqrt{1-\xi}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1.$$

d) $I = [-1, 1]$

$$L_f = \max \left\{ \max_{\xi \in [-1,0]} \left| \frac{1}{\sqrt{1-\xi}} \right|, \max_{\xi \in [0,1]} \left| \frac{1}{\sqrt{1+\xi}} \right| \right\} = \max \left\{ \frac{1}{\sqrt{1}}, \frac{1}{\sqrt{1}} \right\} = 1.$$

Övning 3.20

Bestäm den bästa möjliga Lipschitz-konstanten på intervallet $[2, 5]$ för funktionen genom att derivera.

a) $f(x) = x^2$

$$f'(x) = 2x \implies L_f = \max_{x \in [2,5]} |2x| = 10.$$

b) $f(x) = x^3$

$$f'(x) = 3x^2 \implies L_f = \max_{x \in [2,5]} |3x^2| = 75.$$

c) $f(x) = x^n$

$$f'(x) = nx^{n-1} \implies L_f = \max_{x \in [2,5]} |nx^{n-1}| = n \cdot 5^{n-1}.$$

d) $f(x) = x^{-n}$

$$f'(x) = -nx^{-n-1} \implies L_f = \max_{x \in [2,5]} \left| \frac{n}{x^{n+1}} \right| = 2 \cdot 2^{-n-1}.$$

Övning 3.21

Bestäm gränsvärdet.

a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-4x^2+4x}{x^2-4}$

$$\frac{x^3-4x^2+4x}{x^2-4} = \frac{x(x^2-4x+4)}{x^2-4} = \frac{x(x-2)^2}{(x+2)(x-2)} = \frac{x(x-2)}{(x+2)} \xrightarrow[x\to 2]{} 0.$$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{4^x-1}{x}$
Vi ska utnyttja standardgränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1,$$

genom omskrivningen

$$\frac{4^x-1}{x} = \frac{e^{x\ln(4)}-1}{x} = \{t = x\ln(4)\} = \frac{e^t-1}{t}\ln(4) \xrightarrow[t\to 0]{} \ln(4).$$

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{(x^2-3)^2}{5x^2(x-1)^2}$

$$\frac{(x^2-3)^2}{5x^2(x-1)^2} = \frac{x^4-6x^2+9}{5x^2(x^2-2x+1)} = \frac{x^4-6x^2+9}{5x^4-10x^3+5x^2} = \frac{1-\frac{6}{x^2}+\frac{9}{x^4}}{5-\frac{10}{x}+\frac{5}{x^2}} \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{1}{5}.$$

d) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[4]{x}-x}{\sqrt[3]{8x}-x}$ Nämnaren går mot 1 och täljaren mot 0, så vi får att

$$\frac{\sqrt[4]{x}-x}{\sqrt[3]{8x}-x} \xrightarrow[x\to 1]{} 0.$$

Övning 3.22

Bestäm gränsvärdet.

a) $\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-2}{x^2-2}$

$$\frac{2x^2-2}{x^2-2} \xrightarrow[x\to 2]{} \frac{8-2}{4-2} = 3.$$

b) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+3}-\sqrt{x+4}$
Multiplicera med konjugatet och vi ser att

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{x+4} = \frac{x+3-x-4}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}} = \frac{-1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0.$$

c) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^4+x^2}-\sqrt{x^4+8x^2}$

$$\sqrt{x^4+x^2}-\sqrt{x^4+8x^2} = \frac{x^4+x^2-x^4-8x^2}{\sqrt{x^4+x^2}+\sqrt{x^4+8x^2}} = \frac{-7x^2}{x^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{8}{x^2}}\right)} \xrightarrow[x\to\infty]{} -\frac{7}{2}.$$

d) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}$
Vi har standardgränsvärdet

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

Gör omskrivningen av uttrycket som

$$\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}=e^{4x\ln(1+1/3x)}.$$

Låt nu $t=\frac{1}{3x}$ (så att $t\to 0$ då $x\to\infty$). Vi får då att

$$e^{4x\ln(1+1/3x)}=e^{\frac{4}{3t}\ln(1+t)}\xrightarrow[t\to 0]{}e^{4/3}.$$

Övning 3.23

Bestäm gränsvärdet.

a) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2+x}{2x^2}\right)^{x}$ Skriv om uttrycket enligt

$$\left(1+\frac{2+x}{2x^2}\right)^{x}=e^{x\ln\left(1+\frac{2+x}{2x^2}\right)}=e^{x\ln\left(1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{x^2}\right)}.$$

Låt $t=\frac{1}{2x}$ så att $t\to 0$ då $x\to\infty$, och vi får att

$$e^{x\ln\left(1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{x^2}\right)}=e^{\frac{1}{2}\frac{1}{t}\ln(1+t+4t^2)}.$$

När t är nära 0 beter sig argumentet i logaritmen som $\approx 1+t$, och vi kan använda standardgränsvärdet för $\ln(1+t)/t$ då $t\to 0$. Alltså

$$e^{\frac{1}{2}\frac{1}{t}\ln(1+t+4t^2)}\xrightarrow[t\to 0]{}e^{\frac{1}{2}}.$$

b) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^{7/2}-4x^{7/4}}{2^x x^{1/4}}$
Notera att till exempel α^x växer betydligt snabbare än x^α, så faktumet att 2^x är i nämnaren gör att funktionen går mot 0 när $x\to\infty$.

c) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+3x)}{4^x-1}$
Av samma argument som i föregående deluppgift så går även den här funktionen mot 0, dock ännu snabbare då ln är långsammare än x^α.

d) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{3x^2}$ Vi skriver om uttrycket och får

$$\frac{1-\cos(x)}{3x^2}=\frac{1-\sqrt{1-\sin^2(x)}}{3x^2}=\frac{1-1+\sin^2(x)}{3x^2(1+\sqrt{1+\sin^2(x)})}=\frac{1}{3}\underbrace{\frac{\sin^2(x)}{x^2}}_{\to 1}\underbrace{\frac{1}{1+\sqrt{1+\sin^2(x)}}}_{\to 1/2}\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{1}{6}.$$

där vi använt oss av standardgränsvärdet för $\sin(x)/x$ då $x\to 0$.

Övning 3.24

Bestäm gränsvärdet.

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2-1)-\ln(x-1)}{\sin(\pi x)}$

$$\frac{\ln(x^2-1)-\ln(x-1)}{\sin(\pi x)} = \frac{\ln\left(\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}\right)}{\sin(\pi x)} = \frac{\ln(x+1)}{\sin(\pi x)} = \frac{\pi x}{\sin(\pi x)}\frac{\ln(x+1)}{\pi x} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{\pi},$$

där vi använt standardgränsvärdena för $\sin(x)/x$ och $\ln(1+x)/x$ då $x \to 0$.

b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-\cos(x)}{2\sin(x)}$

$$\frac{e^x-\cos(x)}{2\sin(x)} = \frac{1}{2}\frac{x}{\sin(x)}\frac{e^x-\cos(x)}{x} = \frac{1}{2}\frac{x}{\sin(x)}\left(\frac{e^x-1}{x}+\frac{1-\cos(x)}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2},$$

där vi använt standardgränsvärdena $\sin(x)/x$ och $(e^x-1)/x$ då $x \to 0$, samt att

$$\frac{1-\cos(x)}{x} = \frac{1-\cos^2(x)}{x(1+\cos(x))} = \frac{\sin^2(x)}{x^2}\frac{x}{1+\cos(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

c) $\lim_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$

$$x(\sqrt{x^2+1}-x) = \frac{x(x^2+1-x^2)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{1}{2}.$$

d) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+2}{x+3}\right)^x$

Gör omskrivningen

$$\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^x = e^{x\ln(\frac{x+2}{x+3})} = e^{x\ln(1-\frac{1}{x+3})},$$

och låt sedan $t = -1/(x+3)$. Detta ger

$$e^{x\ln(1-\frac{1}{x+3})} = e^{-(\frac{1}{t}+3)\ln(1+t)} = \underbrace{e^{-\frac{1}{t}\ln(1+t)}}_{\to e^{-1}}\underbrace{e^{-3\ln(1+t)}}_{\to 1} \xrightarrow[t\to 0]{} e^{-1}.$$

Övning 3.25

Bestäm gränsvärdet.

a) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x+4}{4x+3}\right)^x$

För stora x får vi att funktionen beter sig som $(\frac{3}{4})^x$, vilket ger att vi får

$$\left(\frac{3x+4}{4x+3}\right)^x = \left(\frac{3+\frac{4}{x}}{4+\frac{3}{x}}\right)^x \xrightarrow[x\to\infty]{} 0.$$

b) $\lim_{x\to 0}(1+3x)^{1/(8x)}$

$$(1+3x)^{1/(8x)} = e^{\frac{1}{8x}\ln(1+3x)} = e^{\frac{3}{8t}\ln(1+t)} \xrightarrow[t\to 0]{} e^{3/8},$$

där vi gjort substitutionen $t = 3x$.

c) $\lim_{x\to 0} = \frac{x-\sin(x)}{x-\tan(x)}$

Vi gör först omskrivningen (med substitutionen $x = 3y$ som ger $y \to 0$ då $x \to 0$)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x-\tan(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x^3} \cdot \frac{x^3}{x-\tan(x)} = \lim_{y\to 0} \frac{3y-\sin(3y)}{(3y)^3} \cdot \lim_{y\to 0} \frac{(3y)^3}{3y-\tan(3y)} = \frac{L_1}{L_2},$$

där L_1 är första faktorn och L_2 är 1 delat med andra faktorn. För L_1 kan vi använda identiteten

$$\sin(3y) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x),$$

och får då

$$L_1 = \lim_{y\to 0} \frac{3y-\sin(3y)}{(3y)^3} = \lim_{y\to 0} \frac{3}{27}\frac{y-\sin(y)}{y^3} + \lim_{y\to 0} \frac{4}{27}\frac{\sin^3(y)}{y^3} = \frac{1}{9}L_1 + \frac{4}{27},$$

som därmed ger att vi kan lösa ut $L_1 = \frac{1}{6}$. Vi använder liknande strategi för L_2, med identiteten

$$\tan(3x) = \frac{3\tan(x) - \tan^3(x)}{1-3\tan^2(x)}.$$

Då får vi att

$$\begin{aligned}
L_2 &= \lim_{y\to 0} \frac{3y-\tan(3y)}{27y^3} \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{1}{(1-3\tan^2(y))} \cdot \frac{3y(1-3\tan^2(y)) - 3\tan(y) + \tan^3(y)}{27y^3} \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{1}{(1-3\tan^2(y))} \cdot \left(\frac{3}{27}\frac{y-\tan(y)}{y^3} + \frac{1}{27}\frac{\tan^3(y)}{y^3} - \frac{9}{27}\frac{y\tan^2(y)}{y^3}\right) \\
&= \frac{3}{27}L_2 + \frac{1}{27} - \frac{1}{3},
\end{aligned}$$

så att vi sedan kan lösa ut $L_2 = -1/3$. Totala gränsvärdet blir då

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x-\tan(x)} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{1/6}{-1/3} = -\frac{1}{2}.$$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{(\sin(x^\pi))^2}{1-\cos(2x^\pi)}$

Låt $t = x^\pi$, så att $t \to 0$ då $x \to 0$. Då får vi

$$\frac{(\sin(x^\pi))^2}{1-\cos(2x^\pi)} = \frac{\sin^2(t)}{1-\cos(2t)} = \frac{\sin^2(t)}{1-(\cos^2(t)-\sin^2(t))} = \frac{\sin^2(t)}{2\sin^2(t)} = \frac{1}{2} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{1}{2}.$$