TMV225
Kapitel 4

Övning 4.1

Bestäm funktionens derivata med hjälp av derivatans definition.

a) $f(x) = x^2$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x.$$

b) $f(x) = -\sqrt{x}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-x-h+x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

c) $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1+x+h}{1-x-h} - \frac{1+x}{1-x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(1+x+h)(1-x)-(1+x)(1-x-h)}{(1-x-h)(1-x)}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2h}{x^2+hx-2x-h+1}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2}{x^2+(h-2)x-h+1}$$
$$= \frac{2}{x^2-2x+1} = \frac{2}{(1-x)^2}.$$

d) $f(x) = x^3 - 1/x$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - \frac{1}{x+h} - x^3 + \frac{1}{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3 + \frac{x+h-x}{x(x+h)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 + \frac{h}{x(x+h)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 3x^2 + 3xh + h^2 + \frac{1}{x(x+h)} \\
&= 3x^2 + \frac{1}{x^2}.
\end{aligned}$$

Övning 4.2

Bestäm ekvationen för tangentlinjen till funktionen i den givna punkten.

a) $f(x) = x^2 + 4,\ x = 2$

Derivatan ges av $f'(x) = 2x$, vilket medför att lutningskoefficienten i $x = 2$ är $k = 4$. Vi har alltså tangentlinjen

$$y = 4x + m.$$

För att bestämma m kan vi stoppa in punkten $(x, f(x)) = (2, 8)$ och se att

$$m = 8 - 4 \cdot 2 = 0.$$

Alltså $y = 4x$.

b) $f(x) = \sqrt{x+3},\ x = 1$

Derivatan ges av $f'(x) = 1/2\sqrt{x+3}$, och därmed är $k = 1/2\sqrt{1+3} = 1/4$. Vi använder punkten $(x, f(x)) = (1, 2)$ och får att

$$m = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4},$$

alltså är ekvationen för tangentlinjen $y = x/4 + 7/4$.

c) $f(x) = \frac{3x}{x+1},\ x = 1$

Derivatan ges med kvotregeln av

$$f'(x) = \frac{3(x+1) - 3x}{(x+1)^2},$$

som då ger $k = (6-3)/2^2 = 3/4$. Vi använder punkten $(1, \frac{3}{2})$ för att få ut m enligt

$$m = \frac{3}{2} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4},$$

och alltså är $y = \frac{3x}{4} + \frac{3}{4}$.

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}},\ x = 4$

Derivatan ges av $f'(x) = -\frac{1}{2x^{3/2}}$, och därmed är $k = -\frac{1}{2\cdot 4^{3/2}} = -\frac{1}{16}$. Med punkten $(4, \frac{1}{2})$ ges m enligt

$$m = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

och därmed är $y = -x/16 + 3/4$.

Övning 4.3

Låt $f(x) = \sin(x)$ och $g(x) = \cos(x)$. Bestäm uttrycken.

a) $g' \circ f$

$g'(x) = -\sin(x)$, och vi får därmed

$$g' \circ f = g'(f(x)) = -\sin(\sin(x)).$$

b) $g'' \circ f'$

Vi har att $g''(x) = -\cos(x)$ och $f'(x) = \cos(x)$, alltså får vi

$$g'' \circ f' = g''(f'(x)) = -\cos(\cos(x)).$$

c) $g \circ g'$

$$g \circ g' = g(g'(x)) = \cos(-\sin(x)),$$

som även är lika med $\cos(\sin(x))$ eftersom $\cos(x) = \cos(-x)$ (jämn funktion).

d) $f' \circ g''$

$$f' \circ g'' = f'(g''(x)) = \cos(-\cos(x)) = \cos(\cos(x)),$$

ännu en gång eftersom $\cos(x)$ är en jämn funktion.

Övning 4.4

Bestäm ekvationen för tangentlinjen till funktionen i den givna punkten.

a) $f(x) = \arcsin(x),\ x = 0$

Derivatan ges av $f'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$, vilket ger $k = 1$. Punkten $(0, 0)$ ger sedan att

$$m = 0 - 0 = 0.$$

Alltså, $y = x$.

b) $f(x) = e^x,\ x = -1$

Derivatan ges av $f'(x) = e^x$, vilket ger $k = e^{-1}$. Punkten $(-1, e^{-1})$ ger även

$$m = e^{-1} + e^{-1} = 2e^{-1},$$

och därmed är $y = e^{-1}x + 2e^{-1}$.

c) $f(x) = \arccos(x),\ x = -\sqrt{3}/2$
Derivatan ges av $f'(x) = -1/\sqrt{1-x^2}$, vilket ger $k = -1/\sqrt{1-3/4} = -2$. Vidare ger punkten $(-\sqrt{3}/2, 5\pi/6)$ att

$$m = \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3},$$

alltså får vi att $y = -2x + \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$.

d) $f(x) = \ln(x),\ x = e$

Derivatan blir $f'(x) = 1/x$, vilket ger $k = 1/e$. Vidare ger punkten $(e, 1)$ att

$$m = 1 - \frac{e}{e} = 0,$$

och alltså $y = \frac{x}{e}$.

Övning 4.5

Bestäm funktionen tredjederivata.

a) $f(x) = x^5$

$$f'(x) = 5x^4, \qquad f''(x) = 20x^3, \qquad f'''(x) = 60x^2.$$

b) $f(x) = \cos(x)$

$$f'(x) = -\sin(x), \qquad f''(x) = -\cos(x), \qquad f'''(x) = \sin(x).$$

c) $f(x) = \ln(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \qquad f'''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

d) $f(x) = \arctan(x)$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+x^2}, \\
f''(x) &= -\frac{2x}{(1+x^2)^2} = -2x(1+x^2)^{-2}, \\
f'''(x) &= -2(1+x^2)^{-2} + 4x(1+x^2)^{-3} \cdot 2x = \frac{-2}{(1+x^2)^2} + \frac{8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}.
\end{aligned}$$

Övning 4.6

Bestäm funktionens derivata.

a) $f(x) = \frac{e^{3x}}{x}$

$$f'(x) = \frac{3xe^{3x} - e^{3x}}{x^2} = e^{3x}\frac{3x-1}{x}.$$

b) $f(x) = \arcsin(\frac{2x+1}{5})$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x+1}{5}\right)^2}} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}\frac{1}{\sqrt{\frac{25-4x^2-4x-1}{25}}} = \frac{2}{\sqrt{4(6-x^2-x)}} = \frac{1}{\sqrt{-x^2-x+6}}.$$

c) $f(x) = e^{2x}\ln(2x)$

$$f'(x) = 2e^{2x}\ln(2x) + \frac{e^{2x}}{2x}\cdot 2 = e^{2x}\left(2\ln(2x) + \frac{1}{x}\right)$$

d) $f(x) = \cos(2x) - \sin^2(x)$

$$f'(x) = -2\sin(2x) - 2\sin(x)\cos(x) = -2\sin(2x) - \sin(2x) = -3\sin(2x).$$

Övning 4.7

Bestäm funktionens derivata i den givna punkten.

a) $f(x) = \sin(x)\cos(x),\ x = \pi/4$
Först skriver vi så att $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ med hjälp av dubbla vinkeln för sinus. Då ges att

$$f'(x) = \cos(2x) \implies f'(\pi/4) = \cos(\pi/2) = 0.$$

b) $f(x) = \frac{x^{1/5}+x^{-3/5}}{x^{3/5}},\ x = 1$
Skriv om funktionen som $f(x) = x^{1/5-3/5} + x^{-3/5-3/5} = x^{-2/5} + x^{-6/5}$. Då får vi att

$$f'(x) = -\frac{2}{5}x^{-7/5} - \frac{6}{5}x^{-11/5} \implies f'(1) = -\frac{2}{5} - \frac{6}{5} = -\frac{8}{5}.$$

c) $f(x) = \ln(\ln(x)),\ x = 1/2$
Notera att funktionen ej är definierad i punkten $x = 1/2$ (och därmed ej heller deriverbar...), eftersom $\ln(1/2) < 0$ och $\mathcal{D}(\ln(x)) = (0, \infty)$.

d) $f(x) = \frac{(x^2+1)^{17}}{(x^2-1)^{13}},\ x = 0$
Skriv funktionen som $f(x) = (x^2+1)^{17}(x^2-1)^{-13}$. Då får vi

$$f'(x) = 34x(x^2+1)^{16}(x^2-1)^{-13} - 26x(x^2+1)^{17}(x^2-1)^{-14} \implies f'(0) = 0.$$

Övning 4.8

Bestäm funktionens derivata i punkten $x = 1$ givet att $f(1) = 1$ och $f'(1) = 4$.

a) $xf(x)$
Derivatan blir

$$(xf(x))' = f(x) + xf'(x),$$

och alltså är derivatans värde i $x = 1$

$$f(1) + f'(1) = 5.$$

b) $\frac{f(x)^2}{x^2}$
Derivatan av $f(x)^2x^{-2}$ blir

$$\left(f(x)^2x^{-2}\right)' = 2f(x)f'(x)x^{-2} - 2x^{-3}f(x)^2$$

och alltså är derivatans värde i $x = 1$

$$2f(1)f'(1) - 2f(1)^2 = 8 - 2 = 6.$$

c) $f(f(x))$
Derivatan blir

$$(f(f(x)))' = f'(f(x)) \cdot f'(x)$$

och alltså är derivatans värde i $x = 1$

$$f'(f(1)) \cdot f'(1) = 16.$$

d) $\frac{f(x)-x}{f(x)}$
Skriver om funktionen som

$$\frac{f(x) - x}{f(x)} = 1 - xf(x)^{-1}$$

och därmed blir derivatan

$$-f(x)^{-1} + xf(x)^{-2}f'(x).$$

Derivatans värde i $x = 1$ blir därmed

$$-\frac{1}{f(1)} + \frac{f'(1)}{f(1)^2} = -1 + 4 = 3.$$

Övning 4.9

Bestäm funktionens derivata i den givna punkten.

a) $f(x) = \ln(\sin(\exp(x))),\ x = \ln(\pi/3)$
Om vi skriver funktionen som $f(x) = g(h(i(x)))$, med $g(x) = \ln(x)$, $h(x) = \sin(x)$ och $i(x) = \exp(x)$.
Då ges derivatan av f som

$$f'(x) = g'(h(i(x))) \cdot h'(i(x)) \cdot i'(x) = \frac{1}{\sin(\exp(x))} \cdot \cos(\exp(x)) \cdot \exp(x),$$

vilket när vi stoppar in värdet $x = \ln(\pi/3)$ ger

$$\begin{aligned} f'(\ln(\pi/3)) &= \frac{1}{\sin(\exp(\ln(\pi/3)))} \cdot \cos(\exp(\ln(\pi/3))) \cdot \exp(\ln(\pi/3)) \\ &= \frac{1}{\sin(\pi/3)} \cdot \cos(\pi/3) \cdot \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{2} \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

b) $f(t) = \arctan(2t) - 2\arctan(t),\ t = -1$
Derivatan ges av

$$f'(t) = \frac{1}{1 + (2t)^2} \cdot 2 - \frac{2}{1 + t^2},$$

vilket när vi stoppar in givna punkten blir

$$f'(1) = \frac{2}{1+4} - \frac{2}{1+1} = \frac{2}{5} - 1 = -\frac{3}{5}.$$

c) $f(r) = \sqrt{r}\ln(r)\sin(r),\ r = 1$

Notera först att om $f(x) = g(x)h(x)i(x)$, så är

$$f'(x) = g'(x)h(x)i(x) + g(x)h'(x)i(x) + g(x)h(x)i'(x),$$

och alltså har vi derivatan

$$f'(r) = \frac{\ln(r)\sin(r)}{2\sqrt{r}} + \frac{\sin(r)}{\sqrt{r}} + \sqrt{r}\ln(r)\cos(r)$$

och när vi stoppar in givna punkten får vi

$$f'(1) = \underbrace{\frac{\ln(1)\sin(1)}{2\sqrt{1}}}_{=0} + \underbrace{\frac{\sin(1)}{\sqrt{1}}}_{=\sin(1)} + \underbrace{\sqrt{1}\ln(1)\cos(1)}_{=0} = \sin(1).$$

d) $f(s) = -(1 + s^{3/5})^{5/3},\ s = 1$

Derivatan ges av

$$f'(s) = -\frac{5}{3}(1 + s^{3/5})^{2/3} \cdot \frac{3}{5}s^{-2/5},$$

vilket om vi stoppar in $s = 1$ ger

$$f'(1) = 2^{2/3}.$$

Övning 4.10

Bestäm $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ uttryckt i x och y (implicit derivata).

a) $xy + 2y = x$

Deriverar vi det här uttrycket får vi

$$y + xy' + 2y' = 1 \implies (x+2)y' = 1 - y \implies y' = \frac{1-y}{x+2}.$$

b) $\ln(y) - x^3y^2 = \cos(x)$

Deriverar vi det här uttrycket får vi

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} - 3x^2y^2 - 2yy'x^3 = -\sin(x) &\implies (1 - 2y^2x^3)y' = 3x^2y^3 - y\sin(x) \\ &\implies y' = \frac{3x^2y^3 - y\sin(x)}{1 - 2y^2x^3}. \end{aligned}$$

c) $y\ln(y) = x\exp(y)$

Deriverar vi det här uttrycket får vi

$$\begin{aligned} y'\ln(y) + \frac{yy'}{y} = \exp(y) + x\exp(y)y' &\implies (\ln(y) + 1 - xe^y)y' = e^y \\ &\implies y' = \frac{e^y}{\ln(y) + 1 - xe^y}. \end{aligned}$$

d) $\frac{y+x}{y-x} = \sqrt{xy}$

Deriverar vi det här uttrycket får vi

$$\begin{aligned}
\left(\frac{y+x}{y-x}\right)' = (\sqrt{x}\sqrt{y})' &\implies \frac{(y'+1)(y-x)-(y+x)(y'-1)}{(y-x)^2} = \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}y' \\
&\implies \frac{-2xy'+2y}{(y-x)^2} = \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}y' \\
&\implies \left(-\frac{2x}{(y-x)^2} - \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}\right)y' = \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} - \frac{2y}{(y-x)^2} \\
&\implies \left(\frac{-4x\sqrt{y}-\sqrt{x}(y-x)^2}{2\sqrt{y}(y-x)^2}\right)y' = \frac{\sqrt{y}(y-x)^2-4y\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(y-x)^2} \\
&\implies y' = \frac{\sqrt{y}(\sqrt{y}(y-x)^2-4y\sqrt{x})}{\sqrt{x}(-4x\sqrt{y}-\sqrt{x}(y-x)^2)} \\
&\implies y' = \frac{y(4\sqrt{xy}-(y-x)^2)}{x(4\sqrt{xy}+(y-x)^2)}
\end{aligned}$$

Övning 4.11

Bestäm funktionens största värde på intervallet $[0,1]$.

a) $f(x) = x(1-x)$

Vi följer metoden i Ruta 4.1 i kursboken. Ta först fram funktionens lokala extrempunkter. Börja med att ta fram derivatan och lös ekvationen $f'(x) = 0$, dvs

$$1 - 2x = 0 \implies x = \frac{1}{2}.$$

Vidare är inte funktionen singulär på intervallet. Ändpunkterna $x = 0, 1$ ger även lokala extrempunkter. Vi jämför punkterna och ser att

$$f(0) = 0, \qquad f(1/2) = \frac{1}{4}, \qquad f(1) = 0,$$

och får att största värdet funktionen antar på intervallet är $1/4$.

b) $f(x) = x^2(1-x)^2$

Derivatan ges av $f'(x) = 2x(1-x)^2 - 2x^2(1-x)$. Vi löser ekvationen $f'(x) = 0$ och ser att

$$2x(1-x)^2 - 2x^2(1-x) = 0 \implies 2x(1-x)^2 = 2x^2(1-x) \implies 1-x = x \implies x = \frac{1}{2}.$$

Som i föregående deluppgift finns inga singulära punkter och ändpunkterna är $x = 0, 1$. Notera att

$$f(0) = 0, \qquad f(1/2) = \frac{1}{16}, \qquad f(1) = 0,$$

och får att största värdet funktionen antar på intervallet är $1/16$.

c) $f(x) = 3\pi x + 6\sin(\pi x)$
Derivatan ges av $f'(x) = 3\pi + 6\pi\cos(x)$. Vi ser att

$$3\pi + 6\pi\cos(\pi x) = 0 \implies \cos(\pi x) = -\frac{1}{2} \implies \pi x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Den enda punkten av dessa som ligger i intervallet är $x = 2/3$. Vidare finns inga singulära punkter och vi har ändpunkterna $x = 0, 1$. Vi ser alltså från

$$f(0) = 0, \qquad f(2/3) = 2\pi + 3\sqrt{3}, \qquad f(1) = 3\pi,$$

att funktionens största värde på intervallet är $2\pi + 3\sqrt{3}$.

d) $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$
Derivatan ges av $f'(x) = \frac{x+1-(x+2)}{(x+1)^2}$. Vi löser ekvationen $f'(x) = 0$ och ser att

$$\frac{-1}{(x+1)^2} = 0$$

inte har några lösningar på intervallet $[0, 1]$. Det finns alltså inga stationära punkter. Vidare har funktionen inga singulära punkter, så det återstår att kolla ändpunkterna, där vi ser att

$$f(0) = 2, \qquad f(1) = \frac{3}{2}.$$

Alltså ges största värdet i $x = 0$ av $f(0) = 2$.

Övning 4.12

Bestäm funktionens minsta värde på det givna intervallet.

a) $f(x) = 2 + |5 - x|x,\ I = [2, 10]$
Eftersom $|5 - x|x \geq 0$ för alla $x \in I$ ser vi $x = 5$ ger det minsta värdet för funktionen. Svaret blir alltså 2.

b) $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-1},\ I = [0.2]$
Notera att funktionen är singulär i $x = 1 \in I$, alltså

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = -\infty.$$

För högergränsvärdet får vi $+\infty$, men när vi diskuterar minsta värde är det mindre relevant. Funktionen antar därmed aldrig ett minsta värde. Notera att vi däremot har ett infimum för funktionen, dvs

$$\inf_{x\in I} f(x) = -\infty.$$

c) $f(x) = -|x^2 - 4||x - 4|,\ I = [-3, 5]$
Vi kan skriva funktionen som

$$f(x) = \begin{cases} (x^2-4)(x-4), & x \in [-3,-2) \cup (2,4), \\ -(x^2-4)(x-4), & x \in (-2,2) \cup (4,5], \end{cases}$$

och därmed

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 8x - 4, & x \in [-3,-2) \cup (2,4), \\ -3x^2 + 8x + 4, & x \in (-2,2) \cup (4,5]. \end{cases}$$

Vi löser sedan ut att

$$3x^2 - 8x - 4 = 0 \implies x = \frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{3}.$$

Funktionen är ej singulär någonstans, men vi får också kolla ändpunkterna $x = -3, 5$, och får att $f(-3) = -35$, $f(5) = -21$, samt

$$\begin{aligned} f\left(\frac{4+2\sqrt{7}}{3}\right) &= -\left|\frac{(4+2\sqrt{7})^2}{9} - 4\right|\left|\frac{4+2\sqrt{7}}{3} - 4\right| = -\left|\frac{16+16\sqrt{7}+28-36}{9}\right|\left|\frac{4+2\sqrt{7}-12}{3}\right| \\ &= -\left|\frac{8+16\sqrt{7}}{9}\right|\left|\frac{2\sqrt{7}-8}{3}\right| > -\left|\frac{8+16\cdot 3}{9}\right|\left|\frac{2-8}{3}\right| = -\frac{56}{9}\frac{6}{3} = -\frac{336}{9\cdot 3} = -\frac{112}{9} \\ &> -13, \end{aligned}$$

och likadant kan vi visa att $f(x)$ i andra stationära punkten är större än $f(-3) = -35$, som alltså är funktionens minsta värde.

d) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, $I = [0,1]$

Skriv om funktionen enligt

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x + 1.$$

Den här funktionen är strikt växande, och därmed ges minsta värdet av intervallets vänstra ändpunkt, dvs $x = 0$, som ger $f(0) = 1$.

Övning 4.13

Bestäm alla stationära punkter till funktionen.

a) $f(x) = x + \cos(x)$

Ekvationen $f'(x) = 0$ ger oss

$$1 - \sin(x) = 0 \implies \sin(x) = 1 \implies x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

b) $f(x) = 100x + 200\sin(x)$

Ekvationen $f'(x) = 0$ ger oss

$$100 + 200\cos(x) = 0 \implies \cos(x) = -\frac{1}{2} \implies x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

c) $f(x) = \sqrt{3}x + 2\sin(x)$

Ekvationen $f'(x) = 0$ ger oss

$$\sqrt{3} + 2\cos(x) = 0 \implies \cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \implies x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

d) $f(x) = e^{-x}\sin(2x)$
Ekvationen $f'(x) = 0$ ger oss

$$\begin{aligned}-e^{-x}\sin(2x) + 2e^{-x}\cos(2x) = 0 &\implies 2\cos(2x) = \sin(2x) \implies \tan(2x) = 2\\ &\implies x = \frac{\arctan(2)}{2} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Övning 4.14

Bestäm samtliga inflexionspunkter till funktionen.

a) $f(x) = x^3 - x^2$
Inflexionspunkterna är de punkter som löser ekvationen $f''(x) = 0$. Vi har att $f'(x) = 3x^2 - 2x$ och vidare att $f''(x) = 6x - 2$. Alltså får vi att

$$6x - 2 = 0 \implies x = \frac{1}{3}.$$

b) $f(x) = x^4 - x^2$
Vi får från $f''(x) = 0$ att

$$12x^2 - 2 = 0 \implies x^2 = \frac{1}{6} \implies x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

c) $f(x) = \sin(2x)$
Vi får från $f''(x) = 0$ att

$$-4\sin(2x) = 0 \implies \sin(2x) = 0 \implies x = \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

d) $f(x) = \sin(\ln(x))$
Förstaderivatan ges av

$$f'(x) = \cos(\ln(x))\frac{1}{x}$$

och andraderivatan av

$$f''(x) = -\sin(\ln(x))\frac{1}{x^2} - \cos(\ln(x))\frac{1}{x^2}.$$

Från $f''(x) = 0$ får vi därmed

$$\begin{aligned}\sin(\ln(x)) + \cos(\ln(x)) = 0 &\implies \tan(\ln(x)) = -1\\ &\implies \ln(x) = -\frac{\pi}{4} + \pi n\\ &\implies x = e^{-\pi/4+\pi n},\ n \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Övning 4.15

Bestäm på vilka intervall funktionen är växande respektive avtagande.

a) $f(x) = x^2 + 2$
Noterar att derivatan är

$$f'(x) = 2x,$$

som är positiv (och därmed växande) för alla $x > 0$ och negativ (och därmed avtagande) för alla $x < 0$.

b) $f(x) = x^3 - 4x^2$

Derivatan är $f'(x) = 3x^2 - 8x$. Vi noterar att

$$f'(x) = 0 \implies x_1 = 8/3,\ x_2 = 0,$$

vilket betyder att derivatan byter tecken vid punkterna $x = \frac{8}{3}$ och $x = 0$. Mellan de punkterna har vi att $f'(x) < 0$ och innan och efter de punkterna är $f'(x) > 0$. Alltså växande på $(-\infty, 0) \cup (8/3, \infty)$ och avtagande på $(0, 8/3)$.

c) $f(x) = \cos(x)$

Derivatan ges av $f'(x) = -\sin(x)$. Då $\sin(x) < 0$ i $(\pi, 2\pi)$ och $\sin(x) > 0$ i $(0, \pi)$, så har vi att funktionen är avtagande på (notera minustecknet i funktionen) $(2\pi n, 2\pi n + \pi)$ och växande på $(2\pi n - \pi, 2\pi n)$.

d) $f(x) = |x - 2| + |x + 2|$

Vi kan skriva funktionen som

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{då } x > 2, \\ 4, & \text{då } -2 < x < 2, \\ -2x, & \text{då } x < -2. \end{cases}$$

Ta derivatorna för respektive intervall så ser vi att funktionen är växande för $x \in (2, \infty)$ och avtagande för $(-\infty, -2)$.

Övning 4.16

Bestäm på vilka intervall funktionen är växande respektive avtagande.

a) $f(x) = (x - 1)^3$

Derivatan ges av $f'(x) = 3(x - 1)^2$, som alltid är positiv (och därmed växande) för alla $x \in \mathbb{R}$.

b) $f(x) = (x + 2)x^3$

Derivatan ges av $f'(x) = x^3 + 3x^2(x + 2) = 4x^3 + 6x^2 = 2x^2(2x + 3)$. Vi har alltså att $f'(x) > 0$ då $2x + 3 > 0$, vilket är då $x > -3/2$. Med motsvarande argument för negativ derivata har vi att funktionen är avtagande för $x < -3/2$.

c) $f(x) = x^3(4 - x)^2$

Derivatan ges av

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2(4 - x)^2 - 2x^3(4 - x) \\ &= x^2(4 - x)(3(4 - x) - 2x) \\ &= x^2(4 - x)(12 - 5x), \end{aligned}$$

som är negativ endast då $12 - 5x < 0$ och $4 - x > 0$, vilket är då $x \in (12/5, 4)$, och alltså växande för $x \in (-\infty, 12/5) \cup (4, \infty)$.

d) $f(x) = \sin(x) - x$

Derivatan blir $f'(x) = \cos(x) - 1$, och då $\cos(x) \le 1$ för alla $x \in \mathbb{R}$ så är även funktionen avtagande för alla $x \in \mathbb{R}$.

Övning 4.17

Bestäm de punkter på de givna intervallen där tangentlinjen till funktionen är parallell med linjen från $(a, f(a))$ till $(b, f(b))$.

a) $f(x) = (x-1)^2,\ I = [a, b]$

En rät linje mellan punkterna $(a, f(a))$ och $(b, f(b))$ har lutningenskoefficienten

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

och eftersom lutningen för en tangentlinje i en punkt $\bar{x}$ bestäms av $f'(\bar{x})$, så ska vi alltså lösa ekvationen $f'(x) = k$. För den här uppgiften blir det

$$\begin{aligned} 2(x-1) &= \frac{(b-1)^2 - (a-1)^2}{b-a} \implies \\ x - 1 &= \frac{b^2 - 2b + 1 - a^2 + 2a - 1}{2(b-a)} \implies \\ x &= \frac{b^2 - 2b - a^2 - 2a + 2(b-a)}{2(b-a)} \implies \\ x &= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}. \end{aligned}$$

b) $f(x) = \arctan(x),\ I = [-1, 1]$

Vi löser ekvationen

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^2} &= \frac{\arctan(1) - \arctan(-1)}{1 - (-1)} \implies \frac{1}{1+x^2} = \frac{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}}{2} \implies \\ \frac{4}{\pi} &= 1 + x^2 \implies x^2 = \frac{4}{\pi} - 1 \implies x = \pm\sqrt{\frac{4}{\pi} - 1}. \end{aligned}$$

c) $f(x) = e^{-x^2},\ I = [-a, a]$

Vi löser ekvationen

$$-2xe^{-x^2} = \frac{e^{-a^2} - e^{-(-a)^2}}{2a} = 0,$$

vilket ger $x = 0$.

d) $f(x) = \ln(x^2 + 1),\ I = [-1, 2]$

Vi löser ekvationen

$$\frac{2x}{x^2+1} = \frac{\ln(5) - \ln(2)}{3} \implies \frac{\ln(5/2)}{3}x^2 - 2x + \frac{\ln(5/2)}{3} = 0.$$

Detta är en vanlig andragradsekvation som vi kan skriva om enligt

$$x^2 - \frac{6}{\ln(5/2)}x + 1 = 0,$$

med lösningar

$$x = \frac{3}{\ln(5/2)} \pm \sqrt{\frac{9}{\ln(5/2)^2} - 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - \ln(5/2)^2}}{\ln(5/2)},$$

där vi kan notera att endast den ena av lösningarna ligger i det givna intervallet. Alltså har vi lösningen

$$x = \frac{3 - \sqrt{9 - \ln(5/2)^2}}{\ln(5/2)}.$$

Övning 4.18

Visa olikheten med hjälp av medelvärdessatsen.

a) $\sqrt{x} < \frac{x+2}{2},\ x > 1$
Medelvärdessatsen säger

$$\exists \bar{x} \in (a,b) : f'(\bar{x}) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

för något intervall $[a, b]$. Låt oss undersöka $f(x) = \sqrt{x}$ på intervallet $(1, x]$. Då får vi att

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{1}}{x - 1} = \frac{1}{2\sqrt{\bar{x}}} \leq \frac{1}{2} \implies \sqrt{x} \leq \frac{x-1}{2} + 1 = \frac{x - 1 + 2}{2} < \frac{x+2}{2},$$

vilket visar olikheten.

b) $x^n > nx - x,\ x, n > 1$
Medelvärdessatsen på intervallet $(1, x]$ ger

$$\frac{x^n - 1^n}{x - 1} = n\bar{x}^{n-1} > n \implies x^n > n(x-1) + 1 > nx - n,$$

vilket visar olikheten.

c) $e^x > x$
Börjar med att kolla för $x \geq 0$, dvs intervallet $[0, x]$ och får

$$\frac{e^x - e^0}{x - 0} = e^{\bar{x}} > 1 \implies e^x > x + 1 > x.$$

För negativa x kollar vi intervallet $(x, 0)$ och får

$$\frac{e^x - e^0}{x - 0} = e^{\bar{x}} < 1 \implies \frac{e^{-|x|} - 1}{-|x|} < 1 \implies -(e^{-|x|} - 1) < |x| \implies e^{-|x|} > -|x| + 1$$

och då vi har för negativa x att $x = -|x|$, så får vi olikheten

$$e^x > 1 + x > x.$$

d) $\ln(x) \leq x - 1,\ x > 0$
Vi delar upp analysen i två intervall, $(x, 1)$ och $[1, x)$ för att täcka alla möjligheter av $x > 0$ (och för att praktiskt nog $\ln(1) = 0$). För $(x, 1)$ får vi

$$\frac{\ln(x) - \ln(1)}{x - 1} = \frac{1}{\bar{x}} > 1 \implies \frac{-|\ln(x)|}{-(1-x)} > 1 \implies |\ln(x)| > 1 - x \implies -|\ln(x)| < x - 1,$$

och då $-|\ln(x)| = \ln(x)$ för $x < 1$ så visar det olikheten. För $[1, x)$ får vi att

$$\frac{\ln(x) - \ln(1)}{x - 1} = \frac{1}{\bar{x}} \leq 1 \implies \ln(x) \leq x - 1.$$

Övning 4.19

Bestäm linjäriseringen av funktionen runt den givna punkten.

a) $f(x) = \ln(x),\ \bar{x} = 1$

Linjäriseringen av en funktion i en given punkt $\bar{x}$ ges av

$$L_{\bar{x}}[f](x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}).$$

Då derivatan ges av $f'(x) = 1/x$, får vi i punkten $\bar{x} = 1$ linjäriseringen

$$L_{\bar{x}=1}[f](x) = \ln(1) + \frac{1}{1}(x - 1) = x - 1.$$

b) $f(x) = \sqrt{2x},\ \bar{x} = 2$

Derivatan ges av $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}$, så vi får linjäriseringen

$$L_{\bar{x}=2}[f](x) = \sqrt{4} + \frac{1}{\sqrt{4}}(x - 2) = 2 + \frac{x}{2} - 1 = 1 + \frac{x}{2}.$$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5},\ \bar{x} = 3$

Då derivatan ges av $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-5}}$, får vi i punkten $\bar{x} = 3$ linjäriseringen

$$L_{\bar{x}=3}[f](x) = \sqrt{4} + \frac{3}{\sqrt{4}}(x - 3) = \frac{4 + 3x - 9}{2} = \frac{3x - 5}{2}.$$

d) $f(x) = \cos^2(x),\ \bar{x} = \pi/4$

Då derivatan ges av $f'(x) = -2\cos(x)\sin(x) = -\sin(2x)$, får vi i punkten $\bar{x} = \pi/4$ linjäriseringen

$$L_{\bar{x}=\pi/4}[f](x) = \frac{1}{2} - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - x = \frac{2 + \pi}{4} - x.$$

Övning 4.20

Bestäm linjäriseringen av funktionen runt den givna punkten.

a) $f(x) = x\tan(x),\ \bar{x} = \pi.$

Derivatan ges av

$$f'(x) = \tan(x) + \frac{x}{\cos^2(x)}.$$

I punkten $\bar{x} = \pi$ får vi då linjäriseringen

$$L_{\bar{x}=\pi}[f](x) = \pi\tan(\pi) + \left(\tan(\pi) + \frac{\pi}{\cos^2(\pi)}\right)(x - \pi) = \pi x - \pi^2.$$

b) $f(x) = \exp(1 + \ln(x)),\ \bar{x} = 1$

Vi kan skriva funktionen som $f(x))ee^{\ln(x)} = ex$, och redan här ser vi att funktionen är linjär till att börja med (och därmed kommer en linjärisering ge tillbaka samma funktion, men vi visar det med vanliga metoden ändå). Derivatan ges av

$$f'(x) = e.$$

Linjäriseringen i $\bar{x} = 1$ ges alltså av

$$L_{\bar{x}=1}[f](x) = e + e(x-1) = e + ex - e = ex.$$

c) $f(x) = \exp(\sin(\pi x)),\ \bar{x} = \frac{3}{2}$
Derivatan ges av

$$f'(x) = \pi \cos(\pi x)\exp(\sin(\pi x)),$$

och därmed ges linjäriseringen av

$$L_{\bar{x}=3/2}[f](x) = e^{\sin(3\pi/2)} + \pi \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) e^{\sin(3\pi/2)}\left(x - \frac{3}{2}\right) = e^{-1}.$$

d) $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-2},\ \bar{x} = 7$
Derivatan ges av

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+2}}(x-2) - \sqrt{x+2}}{(x-2)^2},$$

som i punkten $\bar{x} = 7$ blir evaluerad till

$$f'(7) = \frac{\frac{5}{6} - 3}{25} = -\frac{13}{150}.$$

Linjäriseringen blir alltså

$$L_{\bar{x}=7}[f](x) = \frac{3}{5} - \frac{13}{150}(x-7) = \frac{3}{5} + \frac{91}{150} - \frac{13x}{150} = \frac{181}{150} - \frac{13x}{150}.$$

Övning 4.21

Bestäm en approximation av värdet med hjälp av linjärisering.

a) $\sqrt{37}$
Välj en lämplig punkt nära $x = 37$, där vi vet värdet på om vi stoppar in det i funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ (förslagsvis $\bar{x} = 36$). Vårt mål är att linjärisera funktionen i $\bar{x} = 36$, och sedan stoppa in $x = 37$, vilket kommer ge oss en approximation på $\sqrt{37}$. Derivatan blir som bekant $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, och linjäriseringen därmed

$$L_{\bar{x}=36}[f](x) = \sqrt{36} + \frac{1}{2\sqrt{36}}(x-36) = 3 + \frac{x}{12}.$$

Linjäriseringens värde i $x = 37$ blir nu vår approximation, dvs

$$L_{\bar{x}=36}[f](37) = 3 + \frac{37}{12} = \frac{73}{12}.$$

b) $f(x) = \sin(43°)$
Vi vet vad $f(x) = \sin(x)$ är i $\bar{x} = \pi/4$ (45°), så vi linjäriserar kring den punkten. Derivatan är som $f(x) = \cos(x)$, och alltså får vi linjäriseringen

$$L_{\bar{x}=\pi/4}[f](x) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4-\pi}{4\sqrt{2}} + \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

I punkten $x = \frac{43\pi}{180}$ ($43°$) får vi därför approximationen

$$L_{\bar{x}=\pi/4}[f]\Big(\frac{43\pi}{180}\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{\pi}{4} + \frac{43\pi}{180}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{45\pi - 43\pi}{180}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{\pi}{90}\right).$$

c) $\sqrt[3]{67}$

Vi linjäriserar funktionen $f(x) = \sqrt[3]{x}$, rimligtvis i punkten $\bar{x} = 64$, då vi i den punkten har det exakta värdet $f(64) = 4$. Derivatan blir

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3x^{2/3}},$$

som i punkten $\bar{x} = 64$ är

$$f'(64) = \frac{1}{3 \cdot 64^{2/3}} = \frac{1}{3 \cdot (64^{1/3})^2} = \frac{1}{3 \cdot 4^2} = \frac{1}{48}.$$

Linjäriseringen blir alltså

$$L_{\bar{x}=64}[f](x) = 4 + \frac{1}{48}(x - 64) = 4 - \frac{4}{3} + \frac{x}{48} = \frac{8}{3} + \frac{x}{48}.$$

I punkten $x = 67$ får vi därför approximationen

$$L_{\bar{x}=64}[f](67) = \frac{8}{3} + \frac{67}{48} = \frac{195}{48} = \frac{65}{16}.$$

d) $\frac{2.998}{3.002}$

Vi linjäriserar funktionen $f(x) = \frac{3-x}{3+x}$, rimligtvis i punkten $\bar{x} = 0$ då vi vet funktionens exakta värde där. Derivatan blir

$$f'(x) = \frac{-(3+x) - (3-x)}{(3+x)^2} = -\frac{6}{(3+x)^2}.$$

Linjäriseringen blir därmed

$$L_{\bar{x}=0}[f](x) = 1 - \frac{2}{3}x.$$

I punkten $x = 0.002 = \frac{1}{500}$ får vi approximationen

$$L_{\bar{x}=0}[f](0.002) = 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{500} = \frac{749}{750}.$$

Övning 4.22

Bestäm ett uttryck för funktionens ensidiga numeriska derivata.

a) $f(x) = x^2$

Den ensidiga numeriska derivatan ges av

$$D_h[f](x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Vi får därmed för $f(x) = x^2$ att

$$D_h[f](x) = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = 2x + h.$$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$

$$D_h[f](x) = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x-x-h}{x(x+h)}}{h} = -\frac{1}{x(x+h)}.$$

c) $f(x) = e^x$

$$D_h[f](x) = \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \frac{e^h - 1}{h}.$$

d) $f(x) = x^3$

$$D_h[f](x) = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2.$$

Övning 4.23

Bestäm ett uttryck för funktionens symmetriska numeriska derivata.

a) $f(x) = x^2$

Den symmetriska numeriska derivatan ges av

$$S_h[f](x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

Vi får därmed för $f(x) = x^2$ att

$$S_h[f](x) = \frac{(x+h)^2 - (x-h)^2}{2h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2 + 2xh - h^2}{2h} = 2x.$$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$

$$S_h[f](x) = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x-h}}{2h} = \frac{\frac{x-h-x-h}{x^2-h^2}}{2h} = -\frac{1}{x^2 - h^2}.$$

c) $f(x) = e^x$

$$S_h[f](x) = \frac{e^{x+h} - e^{x-h}}{2h} = e^x \frac{e^h - e^{-h}}{2h}.$$

d) $f(x) = x^3$

$$\begin{aligned} S_h[f](x) &= \frac{(x+h)^3 - (x-h)^3}{2h} \\ &= \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3 + 3x^2h - 3xh^2 + h^3}{2h} \\ &= \frac{6x^2h + 2h^3}{2h} \\ &= 3x^2 + h^2. \end{aligned}$$

Övning 4.24

Beräkna funktionens ensidiga numeriska derivata i $x = 1$ för $h = 0.01$. (Använd räknare.)

a) $f(x) = x^4$
Derivatan blir

$$D_h[f](x) = \frac{(x+h)^4 - x^4}{h} = 4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3.$$

I punkten $x = 1$ och med steglängd $h = 0.01$ får vi

$$D_{0.01}[f](1) = 4 + 6 \cdot 0.01 + 4 \cdot 0.01^2 + 0.01^3 = 4.060401.$$

b) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$
Uttrycket för derivatan ges av

$$D_h[f](x) = \frac{\frac{(x+h)^2}{x+h+1} - \frac{x^2}{x+1}}{h}.$$

Stoppar vi in våra värden får vi

$$D_{0.01}[f](1) = \frac{\frac{1.01^2}{2.01} - \frac{1}{2}}{0.01} \approx 0.751244.$$

c) $f(x) = 3^{\tan(2x)}$
Uttrycket för derivatan ges av

$$D_h[f](x) = \frac{3^{\tan(2(x+h))} - 3^{\tan(2x)}}{h},$$

vilket med våra värden blir

$$D_{0.01}[f](1) = \frac{3^{\tan(2.02)} - 3^{\tan(2)}}{0.01} = 1.17220.$$

d) $\ln(x+2)/\sqrt[3]{\arctan(x^2)}$
Med våra värden instoppade får vi

$$D_{0.01}[f](1) = \frac{\frac{\ln(1+0.01+2)}{\sqrt[3]{\arctan((1.01)^2)}} - \frac{\ln(1+2)}{\sqrt[3]{\arctan((1)^2)}}}{0.01} = -0.139442.$$

Övning 4.25

Beräkna funktionens symmetriska numeriska derivata i $x = 1$ för $h = 0.01$. (Använd räknare.)

a) $f(x) = \exp(x)$
Skriv upp uttrycket för derivatan och stoppa in värden direkt för att få

$$S_{0.01}[f](1) = \frac{e^{1+0.01} - e^{1-0.01}}{2 \cdot 0.01} = 2.71833.$$

b) $f(x) = \sin(\pi x)$
Skriv upp uttrycket för derivatan och stoppa in värden direkt för att få

$$S_{0.01}[f](1) = \frac{\sin(1.01\pi) - \sin(0.99\pi)}{0.02} = -3.14108.$$

c) $f(x) = \ln(x)$
Skriv upp uttrycket för derivatan och stoppa in värden direkt för att få

$$S_{0.01}[f](1) = \frac{\ln(1.01) - \ln(0.99)}{0.02} = 1.00003.$$

d) $f(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}$
Skriv upp uttrycket för derivatan och stoppa in värden direkt för att få

$$S_{0.01}[f](1) = \frac{\sqrt{1 - \frac{1.01^2}{2}} - \sqrt{1 - \frac{0.99^2}{2}}}{0.02} = -0.707178.$$