TMV225
Kapitel 5

Övning 5.1

Bestäm funktionens Taylorpolynom $P_3[f,\bar{x}]$ för $\bar{x}=1$.

a) $f(x)=\sin(\pi x)$

Taylorpolynomet ges av

$$P_n[f,\bar{x}](x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(\bar{x})(x-\bar{x})^k.$$

I vårt fall får vi alltså

$$\begin{aligned}P_3[f,1](x)&=\sum_{k=0}^{3}\frac{1}{k!}f^{(3)}(1)(x-1)^k\\&=\frac{1}{0!}\sin(\pi)+\frac{\pi}{1!}\cos(\pi)(x-1)-\frac{\pi^2}{2!}\sin(\pi)(x-1)^2-\frac{\pi^3}{3!}\cos(\pi)(x-1)^3\\&=-\pi(x-1)+\frac{\pi^3}{6}(x-1)^3.\end{aligned}$$

b) $f(x)=\sin(\ln(x))$

Derivatorna ges av

$$\begin{aligned}f'(x)&=\cos(\ln(x))x^{-1},\\f''(x)&=-\sin(\ln(x))x^{-2}-\cos(\ln(x))x^{-2},\\f'''(x)&=-\cos(\ln(x))x^{-3}+2\sin(\ln(x))x^{-3}+\sin(\ln(x))x^{-3}+2\cos(\ln(x))x^{-3},\end{aligned}$$

vilket i punkten $x=1$ är

$$f'(1)=1,\quad f''(1)=-1,\quad f'''(1)=1.$$

Alltså får vi att

$$\begin{aligned}P_3[f,1](x)&=\frac{1}{0!}f(1)+\frac{1}{1!}f'(1)(x-1)+\frac{1}{2!}f''(1)(x-1)^2+\frac{1}{3!}f'''(1)(x-1)^3\\&=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{6}(x-1)^3.\end{aligned}$$

c) $f(x) = 3x^2 + 5x + 1$
Derivatorna ges av

$$f'(x) = 6x + 5, \quad f''(x) = 6, \quad f'''(x) = 0,$$

vilket i punkten $x = 1$ är

$$f'(1) = 11, \quad f''(1) = 6, \quad f'''(1) = 0.$$

Alltså får vi att

$$\begin{aligned}
P_3[f,1](x) &= 9 + 11(x-1) + 3(x-1)^2 \\
&= 9 + 11x - 11 + 3(x^2 - 2x + 1) \\
&= -2 + 11x + 3x^2 - 6x + 3 \\
&= 3x^2 + 5x + 1,
\end{aligned}$$

vilket är vad vi kan förvänta oss av att göra en polynomapproximation av ett polynom!

d) $f(x) = \sin(\ln(x)) + 3x^2 + 5x + 1$
I deluppgift **b** löste vi $P_3[f,1](x)$ för $\sin(\ln(x))$ och i **c** för $3x^2 + 5x + 1$. Deras totala blir alltså

$$P_3[f,1](x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 + 3x^2 + 5x + 1.$$

Övning 5.2

Bestäm Taylorpolynomet $P_3[f, \bar{x}]$ för $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ runt punkten $\bar{x}$.

a) $\bar{x} = 0$
Först och främst tar vi fram alla nödvändiga derivator, så vi sedan kan använda dem för alla deluppgifter. De ges av

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{x + 2 - x - 1}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2}, \\
f''(x) &= \frac{-2}{(x+2)^3}, \\
f'''(x) &= \frac{6}{(x+2)^4}.
\end{aligned}$$

För $\bar{x} = 0$ får vi då

$$\begin{aligned}
P_3[f,1](x) &= \frac{1}{0!}f(0) + \frac{1}{1!}f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3.
\end{aligned}$$

b) $\bar{x} = -1$

$$\begin{aligned}
P_3[f,-1](x) &= \frac{1}{0!}f(-1) + \frac{1}{1!}f'(-1)(x+1) + \frac{1}{2!}f''(-1)(x+1)^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)(x+1)^3 \\
&= (x+1) - (x+1)^2 + (x+1)^3
\end{aligned}$$

c) $\bar{x} = -2$

Notera att vi delar med 0 i givna punkten. Taylorpolynomet existerar alltså inte.

d) $\bar{x} = 2$

$$\begin{aligned} P_3[f,2](x) &= \frac{1}{0!}f(2) + \frac{1}{1!}f'(2)(x-2) + \frac{1}{2!}f''(2)(x-2)^2 + \frac{1}{3!}f'''(2)(x-2)^3 \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{16}(x-2) - \frac{1}{64}(x-2)^2 + \frac{1}{256}(x-2)^3. \end{aligned}$$

Övning 5.3

Bestäm funktionens Maclaurinpolynom $Q_3[f]$.

a) $3x^2 + 5x + 1 + 4x^4$

Vi har derivatorna

$$f'(x) = 16x^3 + 6x + 5, \quad f''(x) = 48x^2 + 6, \quad f'''(x) = 96x.$$

Maclaurinpolynomet ges av Taylorpolynomet i punkten $\bar{x} = 0$, som alltså blir

$$\begin{aligned} Q_3[f](x) = P_3[f,0](x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 \\ &= 1 + 5x + 3x^2 + 0, \end{aligned}$$

vilket blir vårt ursprungliga polynom, men där termer av högre grad än 3 är uteslutna.

b) $f(x) = 1/x$

Maclaurinpolynomet är Taylorpolynomet i $\bar{x} = 0$, men där delar vi med 0, så polynomet existerar ej.

c) $f(x) = \sqrt{x}$

Förstaderivatan ges av $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, och här delar vi med 0 i punkten $\bar{x} = 0$, och alltså existerar ej polynomutvecklingen.

d) $f(x) = x^3 \sin(x)$

Derivatorna ges av

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 \sin(x) + x^3 \cos(x), \\ f''(x) &= 6x \sin(x) + 3x^2 \cos(x) + 3x^2 \cos(x) - x^3 \sin(x), \\ f'''(x) &= 6 \sin(x) + 12x \cos(x) - 6x^2 \sin(x) - 3x^2 \sin(x) - x^3 \cos(x). \end{aligned}$$

Notera här att funktionen samt dess tre första derivator alla blir 0 i punkten $\bar{x} = 0$. Maclaurinpolynomet blir alltså $Q_3[f](x) = 0$.

Övning 5.4

Bestäm värdet av funktionens Taylorpolynom $P_2[f,1]$ i punkten x.

a) $f(x) = \frac{1}{x}, \ x = 1.1$

Derivatorna ges av

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \qquad f''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Taylorpolynomet ges alltså av

$$\begin{aligned}P_2[f,1](x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 \\ &= 1 - (x-1) + (x-1)^2.\end{aligned}$$

I givna punkten får vi därför

$$P_2[f,1](1.1) = 1 - 0.1 + 0.01 = 0.91.$$

b) $\ln(x),\ x = 2$
Derivatorna ges av

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Taylorpolynomet ges alltså av

$$\begin{aligned}P_2[f,1](x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 \\ &= 0 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2.\end{aligned}$$

I givna punkten får vi därför

$$P_2[f,1](2) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

c) $f(x) = \arctan(x),\ x = 0.95$
Derivatorna ges av

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Taylorpolynomet ges alltså av

$$\begin{aligned}P_2[f,1](x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2.\end{aligned}$$

I givna punkten får vi därför

$$P_2[f,1](0.95) = \frac{\pi}{4} - \frac{0.05}{2} - \frac{0.05^2}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{40} - \frac{1}{1600} = \frac{400\pi - 41}{1600}.$$

d) $f(x) = 2\sin(x)\cos(x),\ x = 2$
Funktionen kan skrivas som $f(x) = \sin(2x)$. Då ges derivatorna av

$$f'(x) = 2\cos(2x), \qquad f''(x) = -4\sin(2x).$$

Taylorpolynomet ges alltså av

$$\begin{aligned}P_2[f,1](x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 \\ &= \sin(2) + 2\cos(2)(x-1) - 2\sin(2)(x-1)^2.\end{aligned}$$

I givna punkten får vi därför

$$P_2[f,1](2) = \sin(2) + 2\cos(2) - 2\sin(2) = 2\cos(2) - \sin(2).$$

Övning 5.5

Använd Taylors sats för att uppskatta feltermens storlek för approximationerna i uppgift 5.4.

a)

Taylors sats säger att funktionen kan skrivas som

$$f(x) = P_n[f, \bar{x}](x) + E_n[f, \bar{x}](x),$$

där $E_n[f, \bar{x}](x)$ är feltermen som ges av

$$E_n[f, \bar{x}](x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - \bar{x})^{n+1},$$

för något ξ mellan $\bar{x}$ och x. Den här termens storlek kan sen uppskattas med

$$|E_n[f, \bar{x}](x)| = \frac{1}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(\xi)| \cdot |x - \bar{x}|^{n+1} \leq \frac{|x - \bar{x}|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{\xi \in [x, \bar{x}]} |f^{(n+1)}(\xi)|.$$

Vi behöver alltså ta ut tredjederivatan för varje funktion i Övning 5.4. För första deluppgiften har vi därför

$$f'''(x) = -\frac{6}{x^4},$$

och feltermens storlek uppskattas då av (med $\bar{x} = 1$ och $x = 1.1$)

$$|E_2[f, 1](1.1)| \leq \frac{|1.1 - 1|^3}{3!} \sup_{\xi \in [1, 1.1]} |f'''(\xi)| = \frac{1}{6000} |f'''(1)| = \frac{1}{1000}.$$

b)

Tredjederivatan här ges av

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Feltermen kan därmed uppskattas som (med $\bar{x} = 1$ och $x = 2$)

$$|E_2[f, 1](2)| \leq \frac{|2 - 1|^3}{3!} \sup_{\xi \in [1, 2]} |f'''(\xi)| = \frac{1}{6} |f'''(1)| = \frac{1}{3}.$$

c)

Tredjederivatan här ges av

$$f'''(x) = -2(1 + x^2)^{-2} + 8x^2(1 + x^2)^3 = \frac{-2(1 + x^2) + 8x^2}{(1 + x^2)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(1 + x^2)^3}.$$

Feltermen kan därmed uppskattas som (med $\bar{x} = 1$ och $x = 0.95$)

$$|E_2[f, 1](0.95)| \leq \frac{|0.95 - 1|^3}{3!} \sup_{\xi \in [0.95, 1]} |f'''(\xi)|.$$

Här, för att kunna uppskatta faktorn $\sup_{\xi\in[0.95,1]} |f'''(\xi)|$ måste vi veta vart på intervallet $[0.95, 1]$ som $|f'''(\xi)|$ är störst. För att göra detta deriverar vi funktionen och ser om den är växande eller avtagande på intervallet. Fjärdederivatan ges av

$$\begin{aligned} f^{(4)}(x) &= \frac{12x(1+x^2)^3 - 6x(6x^2-2)(1+x^2)^2}{(1+x^2)^6} \\ &= \frac{12x(1+x^2) - 6x(6x^2-2)}{(1+x^2)^4} \\ &= \frac{12x + 12x^3 - 36x^3 + 12x}{(1+x^2)^4} \\ &= \frac{24x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}. \end{aligned}$$

Här ser vi att $f^{(4)}(x) \geq 0$ för alla $x \in [0.95, 1]$, vilket betyder att $f'''(x)$ är växande för alla sådana x. Alltså gäller att

$$\sup_{\xi\in[0.95,1]} |f'''(\xi)| = |f'''(1)|,$$

och vi har att

$$|E_2[f,1](0.95)| \leq \frac{0.05^3}{6}|f'''(1)| = \frac{1}{20^3 \cdot 6}\frac{4}{8} = \frac{1}{8000 \cdot 12} = \frac{1}{96000}.$$

d)

Tredjederivatan här ges av

$$f'''(x) = -8\cos(2x).$$

Feltermen kan därmed uppskattas som (med $\bar{x} = 1$ och $x = 2$)

$$|E_2[f,1](2)| \leq \frac{|2-1|^3}{3!} \sup_{\xi\in[1,2]} |f'''(\xi)| = \frac{1}{6}|f'''(\pi/2)| = \frac{4}{3}|\cos(\pi)| = \frac{4}{3}.$$

Övning 5.6

Bestäm gränsvärdet.

a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

Vi kan använda konjugatregeln och få att

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1 \xrightarrow[x\to 1]{} 2.$$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x}$

Då e^x växer signifikant mycket snabbare än polynomet $2x$, så går gränsvärdet mot 0. (Går att visa genom att enkelt applicera L'Hôpital en gång på gränsvärdet.)

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$

Vi kan Taylorutveckla $\sin(x)$ kring $\bar{x} = 0$ och få (Maclauringutvecklingen)

$$\sin(x) = x + \mathcal{O}(x^3).$$

Gränsvärdet kan därmed beräknas som

$$\frac{\sin(3x)}{\sin(2x)} = \frac{3x + \mathcal{O}(x^3)}{2x + \mathcal{O}(x^3)} = \frac{3 + \mathcal{O}(x^2)}{2 + \mathcal{O}(x^2)} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{3}{2}.$$

d) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x}$
Då e^x växer signifikant snabbare än polynomet x^2 så går gränsvärdet mot 0. (Går att visa genom att enkelt applicera L'Hôpital två gånger på gränsvärdet.)

Övning 5.7

Bestäm gränsvärdet.

a) $\lim_{x\to 0+} x\ln(x)$
Gör variabelbytet $t = 1/x$, vilket gör att $t \to \infty$ då $x \to 0+$. Vi kollar alltså istället på gränsvärdet

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln(1/t)}{t}.$$

Detta ger gränsvärdet "$\frac{\infty}{\infty}$", så vi kan applicera L'Hôpital och istället få gränsvärdet

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\frac{1}{1/t}\cdot\frac{-1}{t^2}}{1} = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{t} = 0.$$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2)}{\sin^2(x)}$
Vi har att $\ln(x^2) \to -\infty$ och $\sin^2(x) \to 0$ då $x \to 0$, vilket totalt sett ger

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2)}{\sin^2(x)} = -\infty.$$

c) $\lim_{x\to 1} \frac{\cos(\pi x)+x}{x-1}$
Notera att vi får gränsvärdet "$\frac{0}{0}$". Vi kan alltså använda L'Hôpitals första regel på gränsvärdet, dvs vi deriverar täljare och nämnare och fåristället gränsvärdet

$$\lim_{x\to 1} \frac{-\pi\sin(\pi x) + 1}{1} = 1.$$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{\sin(x)}$
Vi får gränsvärdet "$\frac{0}{0}$" och använder L'Hôpitals första regel en gång och får

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{\cos(x)} = 1.$$

Övning 5.8

Bestäm gränsvärdet.

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x\tan(x)}$

Maclaurinutvecklingen av $\sin(x)$ och $\cos(x)$ ges av

$$\sin(x) = x + \mathcal{O}(x^3),$$
$$\cos(x) = 1 + \mathcal{O}(x^2).$$

Detta ger oss uttrycket

$$\frac{\sin(x^2)}{x\tan(x)} = \frac{(x^2 + \mathcal{O}(x^6))\cos(x)}{x\sin(x)} = \frac{(x^2 + \mathcal{O}(x^6)(1 + \mathcal{O}(x^2))}{x(x + \mathcal{O}(x^3))}$$
$$= \frac{x^2 + \mathcal{O}(x^4)}{x^2 + \mathcal{O}(x^4)} = \frac{1 + \mathcal{O}(x^2)}{1 + \mathcal{O}(x^2)} \xrightarrow[x\to 0]{} 1.$$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(x)}{(2x+3x^2)(2x-3x^2)}$
Med Maclaurinutveckling av $\sin(x)$ får vi

$$\frac{x\sin(x)}{(2x+3x^2)(2x-3x^2)} = \frac{x(x+\mathcal{O}(x^3))}{4x^2 - 9x^4} = \frac{x^2 + \mathcal{O}(x^4)}{4x^2 - 9x^4} = \frac{1 + \mathcal{O}(x^2)}{4 - 9x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{4}.$$

c) $\lim_{x\to 1+} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}$
Konjugatregeln ger

$$\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \xrightarrow[x\to 1+]{} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

d) $\lim_{x\to 0+} x^x$
Skriv om uttrycket enligt

$$x^x = e^{x\ln(x)},$$

och då vi i Övning 5.7a visat att $x\ln(x) \to 0$ då $x \to 0$, får vi att

$$e^{x\ln(x)} \xrightarrow[x\to 0+]{} e^0 = 1.$$

Övning 5.9

Bestäm gränsvärdet.

a) $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x$
Skriv om uttrycket enligt

$$\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x = e^{x\ln(1+\frac{1}{2x})}.$$

Gör variabelbytet $t = \frac{1}{2x}$ och få istället gränsvärdet

$$\lim_{t\to 0} e^{\frac{1}{2t}\ln(1+t)}.$$

Här kan vi utnyttja standardgränsvärdet för $\ln(1+t)/t$, men för att öva på Taylorutvecklingar så noterar vi att vi har Maclaurinutvecklingen

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \mathcal{O}(t^3).$$

Vi ser då att uttrycket blir

$$e^{\frac{1}{2t}(t-\frac{t^2}{2}+\mathcal{O}(t^3))} = e^{\frac{1}{2}-\frac{t}{4}+\mathcal{O}(t^2)} \xrightarrow[t\to 0]{} e^{\frac{1}{2}}.$$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{(\sin(x^\pi))^2}{1-\cos(2x^\pi)}$

Maclaurinutvecklingar av $\sin(x)$ och $\cos(x)$ ges av

$$\sin(x) = x + \mathcal{O}(x^3),$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4).$$

Vi får då att

$$\frac{(\sin(x^\pi))^2}{1-\cos(2x^\pi)} = \frac{(x^\pi + \mathcal{O}(x^{3\pi}))^2}{1-1+\frac{4x^{2\pi}}{2}+\mathcal{O}(x^4)} = \frac{x^{2\pi}+\mathcal{O}(x^{4\pi})}{\frac{4x^{2\pi}}{2}+\mathcal{O}(x^{4\pi})} = \frac{1+\mathcal{O}(x^2)}{\frac{1}{2}+\mathcal{O}(x^2)} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}.$$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x-\tan(x)}$

Vi får uttrycket "$\frac{0}{0}$", så vi kan använda L'Hôpitals första regel och kolla istället på gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{1-\frac{1}{\cos^2(x)}}.$$

Ännu en gång får vi "$\frac{0}{0}$", så vi kan använda regeln igen och få gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{-\frac{2\sin(x)}{\cos^3(x)}} = \lim_{x\to 0} -\frac{\cos^3(x)}{2} = -\frac{1}{2}.$$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{x\ln((1+x)^2)}{\sin(x^2)}$

Vi har Maclaurinutvecklingarna

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3),$$
$$\sin(x) = x - \mathcal{O}(x^3).$$

Vi får då att

$$\frac{x\ln((1+x)^2)}{\sin(x^2)} = \frac{2x\ln(1+x)}{\sin(x^2)} = \frac{2x(x-\frac{x^2}{2}+\mathcal{O}(x^3))}{x^2+\mathcal{O}(x^6)} = \frac{2x^2+\mathcal{O}(x^3)}{x^2+\mathcal{O}(x^6)} = \frac{2+\mathcal{O}(x)}{1+\mathcal{O}(x^4)} \xrightarrow[x\to 0]{} 2.$$

Övning 5.10

Bestäm gränsvärdet.

a) $\lim_{x\to\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^x$

Skriv om enligt

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln(1-\frac{1}{x})} = e^{-\frac{1}{t}\ln(1+t)},$$

där vi gjort variabelbytet $x = -1/t$. Antingen använder vi standardgränsvärdet $\ln(1+t)/t$, eller så använder vi Maclaurintuveckling och får

$$e^{-\frac{1}{t}\ln(1+t)} = e^{-\frac{1}{t}(t+\mathcal{O}(t^2))} = e^{-1+\mathcal{O}(t)} \xrightarrow[t\to 0]{} e^{-1}.$$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{1-\cos(x)}$
Skriv om enligt

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{1-\cos(x)} = \frac{1-\cos(x)-x}{x(1-\cos(x))},$$

vars gränsvärde går mot "$\frac{0}{0}$", så vi använder L'Hôpital, och får gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-1}{1-\cos(x)+x\sin(x)} = -\infty.$$

c) $\lim_{x\to\pi/2}(\tan(x))^{x-\pi/2}$
Skriv om uttrycket som

$$(\tan(x))^{x-\pi/2} = \exp\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\ln(\tan(x))\right).$$

Eftersom funktionen exp är kontinuerlig kan vi flytta in lim innanför funktionen och analysera gränsvärdet

$$\lim_{x\to\pi/2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\ln(\tan(x)) = \lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln(\tan(x))}{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}},$$

som ger gränsvärdet "$\frac{\infty}{\infty}$", så vi kan använda L'Hôpitals regel och få gränsvärdet

$$\lim_{x\to\pi/2} -\frac{\frac{1}{\tan(x)\cos^2(x)}}{\frac{1}{(x-\frac{\pi}{2})^2}} = \lim_{x\to\pi/2}\frac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\cos^2(x)} = \lim_{x\to\pi/2}\frac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{\sin(x)\cos(x)} = \lim_{x\to\pi/2}\frac{2(x-\frac{\pi}{2})^2}{\sin(2x)},$$

vilket ger ett "$\frac{0}{0}$"-gränsvärde. Använder L'Hôpitals igen och får gränsvärdet

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{4(x-\frac{\pi}{2})}{2\cos(2x)} = \frac{0}{2\cos(\pi)} = 0.$$

Totala gränsvärdet går alltså mot

$$\exp(0) = 1.$$

d) $\lim_{x\to 0+} x^{1/x}$
Vi skriver om uttrycket enligt

$$x^{1/x} = e^{\frac{1}{x}\ln(x)}.$$

Här går $1/x \to \infty$, medan $\ln(x) \to -\infty$, så gränsvärdet går mot $e^{-\infty} = 0$.

Övning 5.11

Avgör huruvida serien är konvergent eller divergent.

a) $\sum_{k=5}^{\infty}(3/\pi)^k$

Sats 5.8 i boken visar att en geometrisk serie på formen $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$ konvergerar om och endast om $|a| < 1$. Vi har

$$\sum_{k=5}^{\infty}\left(\frac{3}{\pi}\right)^k,$$

dvs med $a = 3/\pi < 1$, och därmed är serien konvergent.

b) $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\pi k+1}{\sin(k)+3k}\right)^{k+10}$

Vi noterar först att

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\pi k+1}{\sin(k)+3k}\right)^{k+10} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\pi k+1}{\sin(k)+3k}\right)^{k}\underbrace{\left(\frac{\pi k+1}{\sin(k)+3k}\right)^{10}}_{>1} > \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\pi k+1}{\sin(k)+3k}\right)^{k}.$$

Det här är en geometrisk serie på formen $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$, med $a > 1$, vilket medför att den är divergent. Av jämförelsetestet är då alltså originalserien divergent.

c) $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1.001}$

Detta är en p-serie, som den i Sats 5.9. Satsen säger att serien konvergerar om och endast om $p > 1$, och efter $1.001 > 1$ så konvergerar serien.

d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{5+3k+k^{3.999}}$

Vi ska använda Jämförelsetest II (Sats 5.12). Låt a_k vara termerna i serier och $b_k = k^{-0.999}$. Då får vi att

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{k^3/(5+3k+k^{3.999})}{k^{-0.999}} = \frac{k^{3.999}}{5+3k+k^{3.999}} = \frac{1}{\frac{5}{k^{3.999}}+\frac{3}{k^{2.999}}+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} L = 1.$$

Eftersom $L > 0$, så gäller att om $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ är divergent så är $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ även det. Då

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^{-0.999}$$

är en p-serie med $p < 1$, så är serien divergent.

Övning 5.12

Avgör huruvida serien är konvergent eller divergent.

a) $\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k-2}$

Låt $l = k - 2$. Då är serien lika med

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l},$$

som är en serie känd att vara divergent (p-serie med $p = 1$).

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^2+1}$
Vi noterar att termerna har gränsvärdet då $k \to \infty$

$$\frac{k^2}{k^2+1} = \frac{k^2+1-1}{k^2+1} = \frac{k^2+1}{k^2+1} - \frac{1}{k^2+1} = 1 - \frac{1}{k^2+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1,$$

och går alltså inte mot 0, vilket är det första kravet för att en serie ska kunna vara konvergent. Serien är alltså divergent.

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{2^k}$
Vi kollar kvottestet och ser att

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{(k+1)^3}{2^{k+1}}}{\frac{k^3}{2^k}} = \frac{(k+1)^3}{2k^3} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{k}\right)^3 \xrightarrow[k\to\infty]{} \rho = \frac{1}{2}.$$

Kvottestet säger att om $\rho \in [0,1)$ så är serien konvergent, vilket vår serie därmed är.

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2+\sqrt{k}}$
Notera att

$$\frac{1}{2+\sqrt{k}} > \frac{1}{k}$$

för nog stort k (alla $k > 4$). Eftersom

$$\sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k}$$

är divergent, är även vår serie det (enligt Jämförelsetest I).

Övning 5.13

Avgör huruvida serien är konvergent eller divergent.

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{k^2!}$
Notera kvottest

$$\begin{aligned}\frac{a_{k+1}}{a_k} &= \frac{\frac{(2(k+1))!}{(k+1)^2!}}{\frac{(2k)!}{k^2!}} = \frac{k^2!}{(k+1)^2!}\frac{(2k+2)!}{(2k)!} = \frac{k^2!}{(k^2+2k+1)!}(2k+2)(2k+1)\\ &= \frac{(2k+2)(2k+1)}{(k^2+2k+1)(k^2+2k)\cdots(k^2+1)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \rho = 0,\end{aligned}$$

vilket visar att serien är konvergent.

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$
Vi har här en alternerande serie med avtagande termer sådana att

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0, \quad a_{k+1}a_k < 0, \quad |a_{k+1}| \leq |a_k|,$$

och därmed är alla antaganden för Sats 5.14 om Alternerande testet uppfyllt. Satsen visar alltså att serien är konvergent.

c) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\ln(k)}$

Även här har vi en alternerande serie som uppfyller

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0, \quad a_{k+1}a_k < 0, \quad |a_{k+1}| \leq |a_k|,$$

och som alltså konvergent enligt det alternerande testet.

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+k!}{(1+k)!}$

Vi noterar att för seriens termer gäller

$$\frac{1+k!}{(1+k)!} = \frac{1}{(1+k)!} + \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{(1+k)!} + \frac{1}{k+1} > \frac{1}{2(k+1)},$$

för nog stort k (räcker med $k > 3$). Eftersom serien

$$\sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{2(k+1)}$$

är divergent så är alltså originalserien även det enligt Jämförelsetest I.

Övning 5.14

Avgör huruvida serien är konvergent eller divergent.

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k}$

Vi kör kvottestet och får att

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{k+1}{2^{k+1}}}{\frac{k}{2^k}} = \frac{k+1}{2k} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{k}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} \rho = \frac{1}{2},$$

vilket visar att serien är konvergent.

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3k^2+5}{3+5k^2}\right)^k$

Vi noterar att termerna är mindre än 1, eftersom

$$\frac{3k^2+5}{3+5k^2} < 1 \implies 3k^2+5 < 3+5k^2 \implies 2 < 2k^2,$$

vilket gäller för alla $k > 1$. Alltså kan vi notera att det finns ett tal q så att (för $k > 1$)

$$\frac{3k^2+5}{3+5k^2} < q < 1.$$

Vi kan då se att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3k^2+5}{3+5^2}\right)^k < \sum_{k=1}^{\infty} q^k,$$

som är en konvergent serie (geometrisk serie med argument mindre än 1), och därmed är vår serie konvergent enligt Jämförelsetest I.

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{k}\sin(k^{10})}{k\sqrt{k}}$

Eftersom $\sin(x) \leq 1$ för alla $x \in \mathbb{R}$, så kan vi notera att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{k}\sin(k^{10})}{k\sqrt{k}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{1/4}}{k^{3/2}} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-(3/2-1/4)} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-5/4},$$

där sista ledet är en p-serie med $p > 1$, vilket visar att vår serie är konvergent.

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^k}$

Notera att $\frac{2}{k} \leq \frac{1}{2}$ för alla $k \geq 4$, och därför har vi

$$\sum_{k=4}^{\infty} \frac{2^k}{k^k} = \sum_{k=4}^{\infty} \left(\frac{2}{k}\right)^k \leq \sum_{k=4}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k,$$

vilket är en geometrisk serie med argument $|a| < 1$, som därmed är konvergent. Vi har därför att vår ursprungliga serie är konvergent.

Övning 5.15

Avgör huruvida serien är absolutkonvergent, villkorligt konvergent, eller divergent.

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

För att serien ska vara absolutkonvergent så ska serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k},$$

vara konvergent, men detta är en p-serie med $p = 1$, vilket är en divergent serie. Däremot uppfyller serien förutsättningarna för det alternerande testet, och är därmed konvergent. Alltså är serien villkorligt konvergent (konvergent men inte absolutkonvergent).

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k^3\sqrt{k}}{3^k}$

Börjar med att kolla huruvida serien är absolutkonvergent eller inte, dvs vi analyserar serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3\sqrt{k}}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{7/2}}{3^k}.$$

Kvottestet ger att

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{(k+1)^{7/2}}{3^{k+1}}}{\frac{k^{7/2}}{3^k}} = \frac{(k+1)^{7/2}}{3^{k+1}} \cdot \frac{3^k}{k^{7/2}} = \frac{1}{3}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{7/2} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{7/2} \xrightarrow[k\to\infty]{} \rho = \frac{1}{3},$$

och eftersom $\rho \in [0, 1)$ så är serien konvergent. Vår originalserie är alltså absolutkonvergent.

c) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+1)}{k-1}$

För att serien ska kunna vara konvergent måste termerna i serien gå mot 0 då $k \to \infty$. Vi noterar att

$$\frac{k+1}{k-1} = \frac{k-1+1+1}{k-1} = \frac{k-1}{k-1} + \frac{2}{k-1} = 1 + \frac{2}{k-1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1,$$

vilket visar att serien inte kan vara konvergent. Den är alltså divergent.

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi k)\ln(k)}{k+1}$
Notera först att vi kan skriva cos-termen som

$$\cos(\pi k) = (-1)^k,$$

eftersom den antar värdet -1 för udda k och värdet 1 för jämna k. Serien vi analyserar är alltså

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \ln(k)}{k+1}.$$

Vi börjar med att kolla huruvida serien är absolutkonvergent, dvs kollar på serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k)}{k+1}.$$

Notera här att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k)}{k+1} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{l},$$

där vi i sista likheten gjort variabelbytet $l = k+1$ för att skriva om serien som standardformen av en p-serie. Här ser vi att p-serien är divergent (eftersom $p = 1$), och därmed är inte serien absolutkonvergent enligt Jämförelsetest I. Notera däremot att originalserien är en alternerande serie som uppfyller förutsättningarna för alternerande testet, och är därmed en konvergent serie. Serien är alltså villkorligt konvergent.

Övning 5.16

Bestäm potensseriens centrum och konvergensradie.

a) $x - 1 + 2(x-1)^2 + 3(x-1)^3 + ...$
En potensserie har formen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - \bar{x})^k,$$

där $\bar{x}$ är potensseriens centrum. Vi ser alltså att potensserien vi har, vilken kan skrivas som

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(x-1)^k,$$

har centrum i $\bar{x} = 1$. Konvergensradien uppfyller

$$\frac{1}{R} = L = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}.$$

Vi kollar kvoten

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{k+1}{k} = 1 + \frac{1}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} L = 1,$$

vilket ger oss konvergensradien $R = 1/L = 1$.

b) $\sum_{k=1}^{\infty} k! \frac{(x+2)^k}{2}$

Skriv serien som

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{2}(x+2)^k,$$

varav vi ser att vi har centrum i $\bar{x} = -2$, samt $a_k = \frac{k!}{2}$. För konvergensradien ser vi att

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{(k+1)!}{k!} = \frac{k+1}{1} \xrightarrow[k\to\infty]{} L = \infty,$$

vilket ger oss $R = 1/L = 0$.

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{x+2}{2}\right)^k$

Vi skriver serien som

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k2^k}(x+2)^k,$$

och ser att serien har centrum i $\bar{x} = -2$ med $a_k = \frac{1}{k2^k}$. Vi får även att

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{\frac{1}{(k+1)2^{k+1}}}{\frac{1}{k2^k}} = \frac{k2^k}{(k+1)2^{k+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{k+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} L = \frac{1}{2},$$

vilket ger $R = 1/L = 2$.

d) $1 + \frac{3}{4}x + x^2 + \frac{27}{16}x^3 + \frac{81}{25}x^4 + ...$

Först vill vi skriva på potensserieform, dvs vi skriver serien som

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{(k+1)^2}x^k.$$

Potensserien har alltså centrum i $\bar{x} = 0$, och för att kolla konvergensradien ser vi att

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{\frac{3^{k+1}}{(k+2)^2}}{\frac{3^k}{(k+1)^2}} = \frac{3(k+1)^2}{(k+2)^2} = 3\left(\frac{k+1}{k+2}\right)^2 = 3\left(1 - \frac{1}{k+2}\right)^2 \xrightarrow[k\to\infty]{} L = 3,$$

vilket ger $R = 1/L = 1/3$.

Övning 5.17

Bestäm potensseriens centrum och konvergensradie.

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{k!}(x+1)^k$

Centrum blir i $\bar{x} = -1$. För konvergensradien noterar vi att

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{\frac{2(k+1)}{(k+1)!}}{\frac{2k}{k!}} = \frac{2(k+1)}{2k(k+1)} = \frac{1}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} L = 0,$$

vilket ger $R = 1/L = \infty$.

b) $\sum_{k=1}^{\infty} 2k^2(2x+3)^k$

Börja med att skriva om serien så att den blir på formen av en potensserie, dvs

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2k^2(2x+3)^k = \sum_{k=1}^{\infty} 2k^2 2^k \Big(x+\frac{3}{2}\Big)^k.$$

Här ser vi att centrum ligger i $\bar{x} = -\frac{3}{2}$ och för konvergensradien ser vi att

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{2(k+1)^2 2^{k+1}}{2k^2 2^k} = 2\left(\frac{k+1}{k}\right)^2 = 2\left(1+\frac{1}{k}\right)^2 \xrightarrow[k\to\infty]{} L = 2,$$

vilket ger $R = 1/L = 1/2$.

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+k^4}{\sqrt{k}}(3-\frac{x}{3})^k$
Börja med att skriva om serien på potensserieform, dvs

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+k^4}{\sqrt{k}}\Big(3-\frac{x}{3}\Big)^k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1+k^4}{\sqrt{k}3^k}(x-9)^k,$$

varav vi ser att centrum ligger i $\bar{x} = 9$. För konvergensradien noterar vi att

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{\frac{1+(k+1)^4}{\sqrt{k+1}3^{k+1}}}{\frac{1+k^4}{\sqrt{k}3^k}} = \frac{\sqrt{k}(1+(k+1)^4)}{3\sqrt{k+1}(1+k^4)} = \frac{\sqrt{k}}{3\sqrt{k+1}(1+k^4)} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{k}{k+1}}\frac{(1+k)^4}{1+k^4},$$

där den första termen går mot 0 och den andra går mot 1/3 då $k \to \infty$. Konvergensradien blir alltså $R = 1/L = 3$.

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k}\ln(k)}{(2k)^3} x^k$
Notera att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k}\ln(k)}{(2k)^3} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k)}{8k^3} x^k,$$

eftersom $(-1)^{2k} = ((-1)^2)^k = 1^k = 1$. Potensserien har centrum i $\bar{x} = 0$. För konvergensradien ser att

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{\frac{\ln(k+1)}{8(k+1)^3}}{\frac{\ln(k)}{8k^3}} = \frac{\ln(k+1)}{\ln(k)}\frac{k^3}{(k+1)^3} \xrightarrow[k\to\infty]{} L = 1,$$

vilket ger $R = 1/L = 1$.

Övning 5.18

Bestäm potensseriens konvergensradie.

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k^2}\left(\frac{3x+1}{5}\right)^k$
Skriv om på potensserieform, så att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k^2}\left(\frac{3x+1}{5}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k^2}\frac{3^k}{5^k}\left(x+\frac{1}{3}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9^k}{5^k k^2}\left(x+\frac{1}{3}\right)^k,$$

och notera för konvergensradien att

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{\frac{9^{k+1}}{(k+1)^2 5^{k+1}}}{\frac{9^k}{k^2 5^k}} = \frac{9}{5}\left(\frac{k}{k+1}\right)^2 \xrightarrow[k\to\infty]{} L = \frac{9}{5},$$

så att $R = 1/L = 5/9$.

b) $\frac{1}{4}x + \frac{4}{9}x^2 + \frac{9}{16}x^3 + \frac{16}{25}x^4 + ...$

Först måste vi skriva om uttrycket som en potensserie, vilket blir

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k+1)^2} x^k.$$

Konvergensradien tas ut genom att notera att

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{\frac{(k+1)^2}{(k+2)^2}}{\frac{k^2}{(k+1)^2}} = \frac{(k+1)^2(k+1)^2}{k^2(k+2)^2} = \frac{k^2(1+\frac{1}{k})^2 k^2(1+\frac{1}{k})^2}{k^2k^2(1+\frac{2}{k})^2} = \frac{(1+\frac{1}{k})^2(1+\frac{1}{k})^2}{(1+\frac{2}{k})^2} \xrightarrow[k\to\infty]{} L = 1.$$

Alltså är konvergensradien $R = 1/L = 1$.

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k^3}\left(\frac{3x-1}{10}\right)^k$

Skriv om på potensserieform enligt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k^3}\left(\frac{3x-1}{10}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k^3}\frac{3^k}{10^k}\left(x - \frac{1}{3}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9^k}{k^3 10^k}\left(x - \frac{1}{3}\right)^k,$$

och då får vi för konvergensradien att

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{\frac{9^{k+1}}{(k+1)^3 10^{k+1}}}{\frac{9^k}{k^3 10^k}} = \frac{9}{10}\left(\frac{k}{k+1}\right)^3 \xrightarrow[k\to\infty]{} L = \frac{9}{10},$$

vilket ger $R = 1/L = 10/9$.

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{k^3}\left(\frac{2x+1}{3}\right)^k$

Skriv om på potensserieform enligt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{k^3}\left(\frac{2x+1}{3}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{k^3}\frac{2^k}{3^k}\left(x + \frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\cdot 4^k}{k^3 3^k}\left(x + \frac{1}{2}\right)^k.$$

För konvergensradien får vi att

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{\frac{2\cdot 4^{k+1}}{(k+1)^3 3^{k+1}}}{\frac{2\cdot 4^k}{k^3 3^k}} = \frac{4}{3}\left(\frac{k}{k+1}\right)^3 \xrightarrow[k\to\infty]{} L = \frac{4}{3},$$

vilket ger $R = 1/L = 3/4$.

Övning 5.19

Bestäm funktionens potensserie med centrum i $\bar{x} = 0$. (*Ledning: Använd geometrisk summa med termvis derivering.*)

a) $\frac{1}{1-x}$

Ledningen ger oss att vi ska använda geometrisk summa. Sats 5.8 i kursboken ger oss att den ser ut enligt

$$\frac{1}{1-a} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k,$$

vilket i vårt fall ger

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k,$$

vilket är funktionens potensserie med centrum i $\bar{x} = 0$ (med faktorer $a_k = 1$).

b) $\frac{1}{1-2x}$

Använd variabelbytet $t = 2x$, så noterar vi med geometrisk summa att

$$\frac{1}{1-2x} = \frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} (2x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k.$$

c) $\frac{2}{(1-x)^2}$

Notera först att vi har derivatan

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2},$$

vilket visar att vi kan ta fram potensserien för $\frac{1}{1-x}$, och sedan derivera för att få potensserien för $\frac{1}{(1-x)^2}$. Egenskap (iii) i Sats 5.16 i kursboken säger att för en potensserie har vi att

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-\bar{x})^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x-\bar{x})^k = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1}(x-\bar{x})^k.$$

Vi får alltså att

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k,$$

där andra likheten kommer från potensserien för $\frac{1}{1-x}$ och sista likheten från derivering av en potensserie (våra termer är ju $a_k = a_{k+1} = 1$). Totalt får vi alltså att

$$\frac{2}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} 2(k+1)x^k.$$

d) $\frac{1}{(1-x)^3}$

Vi kan här notera att

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right) = \frac{2}{(1-x)^3},$$

och alltså om vi dividerar med 2 får vi sambandet

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right) = \frac{1}{(1-x)^3}.$$

För att få potensserien vi söker kan vi alltså derivera potensserien för $\frac{1}{(1-x)^2}$ (som vi fick ut i föregående deluppgift) och dividera med 2 för att få potensserien vi söker. Alltså

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)(k+2)}{2}x^k,$$

eftersom vi nu har $a_k = k+1$ och därmed får ut faktorn $a_{k+1}(k+1) = (k+2)(k+1)$ framför x^k.

Övning 5.20

Bestäm serierna. (*Ledning: Ansätt* $t = x+1$, $t = x-1$ *osv och använd geometrisk summa och termvis derivering.*)

a) Uttryck $\frac{1}{x}$ i termer av $(x+1)^k$

Vi använder den givna ledningen, och sätter $t = x+1$, vilket ger $x = t-1$. Vi får då geometriska summan

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{t-1} = -\frac{1}{1-t} = -\sum_{k=0}^{\infty}t^k = \sum_{k=0}^{\infty}-(x+1)^k.$$

b) Uttryck $\frac{1}{2x-1}$ i termer av $(x-1)^k$

Låt $t = 1-x$, så noterar vi att

$$\frac{1}{2x-1} = \frac{1}{2-2t-1} = \frac{1}{1-2t},$$

och låt sedan $s = 2t$ för att få att

$$\frac{1}{1-2t} = \frac{1}{1-s} = \sum_{k=0}^{\infty}s^k = \sum_{k=0}^{\infty}2^k t^k,$$

vilket med $t = 1-x$ ger

$$\sum_{k=0}^{\infty}2^k t^k = \sum_{k=0}^{\infty}2^k(1-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-2)^k(x-1)^k.$$

Observera att här gjordes två variabelbyten, men man hade kunnat lösa det med ett variabelbyte genom att direkt ansätta $t = 2(1-x)$.

c) Uttryck $\frac{1}{x^2}$ i termer av $(x+3)^k$

Notera först att

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}.$$

Vi kan alltså börja med att uttrycka $\frac{1}{x}$ som en potensserie med centrum i $\bar{x} = -3$ och sen derivera. Låt $t = x+3$, så att $x = t-3$. Då får vi

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{t-3} = -\frac{1}{3-t} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{t}{3}} = -\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t}{3}\right)^k = -\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x+3}{3}\right)^k = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^{k+1}}(x+3)^k.$$

Vi får därför att (med derivering av potensserie)

$$\frac{1}{x^2} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^{k+1}}(x+3)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^{k+1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x+3)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)}{3^{k+2}}(x+3)^k.$$

d) Uttryck $\frac{x+3}{x+1}$ i termer av $(x-1)^k$

Först och främst skriver vi om uttrycket till den enklare formen

$$\frac{x+3}{x+1} = \frac{x+1+2}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} + \frac{2}{x+1} = 1 + \frac{2}{x+1}.$$

Nu fokuserar vi på att uttrycka $\frac{2}{x+1}$ i termer av $(x-1)^k$. Låt $t = 1-x$, så att $x = 1-t$, vilket ger

$$\frac{2}{x+1} = \frac{2}{2-t} = \frac{1}{1-\frac{t}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}(1-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k}(x-1)^k.$$

Totalt får vi alltså att

$$\frac{x+3}{x+1} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k}(x-1)^k.$$

Övning 5.21

Bestäm Taylorserien för funktionen runt den givna punkten.

a) $e^{-3x},\ \bar{x} = 1$

Taylorserien ser ut på formen

$$T[f,\bar{x}](x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(\bar{x})}{k!}(x-\bar{x})^k.$$

Vi behöver alltså ta ut ett uttryck för $f^{(k)}(\bar{x})$. Vi noterar att

$$f'(x) = -3e^{-3x}, \quad f''(x) = (-3)^2e^{-3x}, \quad f'''(x) = (-3)^3e^{-3x}, \ \ldots\ ,$$

och får därför att $f^{(k)}(1) = \frac{(-3)^k}{e^3}$, vilket ger Taylorserien

$$T[f,1](x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-3)^k}{e^3 k!}(x-1)^k.$$

b) $\sin(2x),\ \bar{x} = \pi$

Vi noterar att

$$f'(x) = 2\cos(2x), \quad f''(x) = -4\sin(2x), \quad f'''(x) = -8\cos(2x), \quad f^{(4)}(x) = 16\sin(2x), \ \ldots\ ,$$

vilket i punkten $\bar{x} = \pi$ ger att $f^{(k)}(\pi) = 0$ för jämna k och $|f^{(k)}(x)| = 2^k$ för udda k med varannan negativ term. Vi kan alltså uttrycka derivatan i en summa som $f^{(k)}(x) = (-1)^k 2^{2k+1}$ (dvs, vi hoppar över alla jämna termer, och låter varannan vara negativ). Totalt får vi att

$$T[f,\pi](x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{(2k+1)!}(x-\pi)^{2k+1},$$

där vi har bytt ut k mot $2k+1$ för att endast observera udda ordningens termer.

c) $\sin^2(x),\ \bar{x} = -\pi/2$

Förstaderivatan blir

$$f'(x) = 2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x).$$

Därefter får vi

$$f''(x) = 2\cos(2x), \quad f'''(x) = -4\sin(2x), \quad f^{(4)}(x) = -8\cos(2x), \quad f^{(5)}(x) = 16\sin(2x), \ ... \ ,$$

vilket liknar föregående deluppgift. I punkten $-\pi/2$ får vi att $f^{(k)}(x) = 0$ för udda k den här gången, och att $|f^{(k)}(x)| = 2^{k-1}$ för jämna k med varannan term negativ. Eftersom $f(-\pi/2) = 1$, får vi därför att

$$\begin{aligned} T[f, -\pi/2](x) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k-1}}{(2k)!}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^{2k} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k-1}}{(2k)!}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^{2k} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{(-1)^0 2^{-1}}{(0)!}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^{0} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k-1}}{(2k)!}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^{2k} \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k-1}}{(2k)!}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^{2k}. \end{aligned}$$

d) $\frac{x+1}{x^2},\ \bar{x} = -2$

Förstaderivatan ges av

$$f'(x) = x^{-2} - 2(x+1)x^{-3} = \frac{x - 2x - 2}{x^3} = -\frac{x+2}{x^3}.$$

Andraderivatan ges av

$$f''(x) = -x^{-3} + 3(x+2)x^{-4} = \frac{-x + 3x + 6}{x^4} = \frac{2x+6}{x^4}.$$

Tredjederivatan ges av

$$f'''(x) = 2x^{-4} - 4(2x+6)x^{-5} = \frac{2x - 8x - 24}{x^5} = -\frac{6x+24}{x^5}.$$

I punkten $\bar{x} = -2$ får vi alltså

$$f(-2) = \frac{-1}{4}, \quad f'(-2) = 0, \quad \frac{f''(-2)}{2} = \frac{1}{16}, \quad \frac{f'''(-2)}{3!} = \frac{2}{32}, \ ... \ ,$$

vilket gör att man kan se sambandet

$$\frac{f^{(k)}(-2)}{k!} = \frac{k-1}{2^{k+2}},$$

och vi får då Taylorserien

$$T[f, -2](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k-1}{2^{k+2}}(x+2)^k.$$

Övning 5.22

Bestäm Taylorserien för funktionen runt den givna punkten.

a) $xe^x,\ \bar{x} = 1$

Deriverar och får att

$$\begin{aligned} f'(x) &= xe^x + e^x, \\ f''(x) &= xe^x + e^x + e^x = xe^x + 2e^x, \\ f'''(x) &= xe^x + e^x + 2e^x = xe^x + 3e^x, \end{aligned}$$

varav vi ser att för godtycklig derivata har vi

$$f^{(k)}(x) = (x+k)e^x,$$

och mer specifikt i punkten $\bar{x} = 1$ får vi

$$f^{(k)}(1) = (k+1)e,$$

och därmed får vi Taylorserien

$$T[f,1](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)e}{k!}(x-1)^k.$$

b) $xe^x,\ \bar{x} = -2$

Likadant som i föregående deluppgift ges att

$$f^{(k)}(x) = (x+k)e^x,$$

och därmed i $\bar{x} = -2$ ges att

$$f^{(k)}(-2) = (k-2)e^{-2},$$

och därmed får vi Taylorserien

$$T[f,-2](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k-2)}{k!e^2}(x+2)^k.$$

c) $x^a e^x,\ \bar{x} = 0$

Vi kan först notera att Taylorutvecklingen av e^x kring $\bar{x} = 0$ ges av

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Vi får då att om vi multiplicerar med x^a att vi får Taylorserien för $x^a e^x$ kring $\bar{x} = 0$ som

$$x^a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+a}}{k!}.$$

Observera att detta fungerar för att $x^a = (x-0)^a$.

d) $xe^x,\ \bar{x} = a$

Som i de första två deluppgifterna har vi

$$f^{(k)}(x) = (x+k)e^x,$$

och därmed i $\bar{x} = a$ ges att

$$f^{(k)}(a) = (k+a)e^a,$$

och därmed får vi Taylorserien

$$T[f,a](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+a)e^a}{k!}(x-a)^k.$$

Övning 5.23

Bestäm funktionens Maclaurinserie.

a) $\frac{x}{(1-x)^2}$
Vi ska alltså ta ut Taylorserien i $\bar{x} = 0$. Derivering ger

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (1-x)^{-2} + 2x(1-x)^{-3} = \frac{1-x+2x}{(1-x)^3} = \frac{1+x}{(1-x)^3}, \\
f''(x) &= (1-x)^{-3} + 3(1+x)(1-x)^4 = \frac{1-x+3+3x}{(1-x)^4} = \frac{4+2x}{(1-x)^4} \\
f'''(x) &= 2(1-x)^4 + 4(4+2x)(1-x)^5 = \frac{2-2x+16+8x}{(1-x)^5} = \frac{6x+18}{(1-x)^5},
\end{aligned}$$

och alltså

$$\frac{f(0)}{0!} = 0, \quad \frac{f'(0)}{1!} = 1, \quad \frac{f''(0)}{2!} = 2, \quad \frac{f'''(0)}{3!} = 3, \quad \ldots, \quad \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = k,$$

varav vi ser att vi har Maclaurinserien

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^k.$$

b) $\cos^2(x)$
Förstaderivatan ges av

$$f'(x) = -2\cos(x)\sin(x) = -\sin(2x),$$

och sedan får vi då att

$$f''(x) = -2\cos(2x), \quad f'''(x) = 4\sin(2x), \quad f^{(4)}(x) = 8\cos(2x), \quad \ldots,$$

varav vi ser att (i $\bar{x} = 0$)

$$|f^{(k)}(0)| = \begin{cases} 0, & \text{för udda } k, \\ 2^{k-1}, & \text{för jämna } k, \end{cases}$$

med varannan positiv och negativ term för jämna k. Maclaurinserien ges alltså av första termen $f(0) = 1$, följt av en summa av derivatorna, dvs

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k-1}}{(2k)!} x^{2k}.$$

c) $e^{(1+x)(1-x)}$

Notera att
$$e^{(1+x)(1-x)} = e^{1-x^2} = e^1 e^{-x^2},$$
så vi behöver endast ta ut en Maclaurinserie för e^{-x^2} och sedan multiplicera in e. Maclaurinserien för e^t ges av
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!},$$
så om vi ersätter t med $-x^2$ får vi
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!}.$$
Om vi avslutar med att multiplicera in e får vi
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e(-1)^k x^{2k}}{k!}.$$

d) $\sin(x)\cos(x)$

Notera att av dubbla vinkeln har vi
$$\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x),$$
så vi behöver bara ta ut Maclaurinserien för $\sin(2x)$. För $\sin(t)$ har vi Maclaurinserien
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1},$$
så om vi ersätter t med $2x$ får vi
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(2x)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$
Avslutar med att multiplicera med $\frac{1}{2}$ som kom med vid omskrivningen och får
$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Övning 5.24

Bestäm funktionens Maclaurinserie.

a) e^{-2x}

Vi har Maclaurinserien för e^x som är
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

som om vi istället stoppar in $-2x$ ger oss

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k x^k}{k!}.$$

b) $\sin(3x)$
Vi har Maclaurinserien för $\sin(x)$ som är

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1},$$

som om vi istället stoppar in $3x$ ger oss

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 3^{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

c) $\cos(3x)$
Vi har Maclaurinserien för $\cos(x)$ som är

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k},$$

som om vi istället stoppar in $3x$ ger oss

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 3^{2k}}{(2k)!} x^{2k}.$$

d) $\sin(x^2)$
Vi har Maclaurinserien för $\sin(x)$ som är

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1},$$

som om vi istället stoppar in x^2 ger oss

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (x^2)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{4k+2}.$$

Övning 5.25

Bestäm seriens värde. (*Ledning: Koppa serierna till kända Maclaurinserier.*)

a) $1 + 1/3 + 1/9 + 1/27 + ...$
I Ruta 5.2 i kursboken finns de mest kända Maclaurinserierna. Vi noterar att vår serie kan skrivas som

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k,$$

vilket vi känner igen som Maclaurinserien för $\frac{1}{1-x}$ med värdet $x = 1/3$. Seriens värde blir alltså

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

b) $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{e^{2n}}$
Notera att serien ser ut som

$$\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{1}{e^2}\right)^n,$$

som liknar Maclaurinserien för $\frac{1}{1-x}$ med $x = \frac{1}{e^2}$. Dock har vi att serien inte startar på 0, så vi noterar att

$$\begin{aligned}
\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{1}{e^2}\right)^n &= \sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{1}{e^2}\right)^n + \frac{1}{e^6} - \frac{1}{e^6} + \frac{1}{e^4} - \frac{1}{e^4} + \frac{1}{e^2} - \frac{1}{e^2} + 1 - 1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{e^2}\right)^n - \left(\frac{1}{e^6} + \frac{1}{e^4} + \frac{1}{e^2} + 1\right) \\
&= \frac{1}{1-\frac{1}{e^2}} - \left(\frac{1}{e^6} + \frac{1}{e^4} + \frac{1}{e^2} + 1\right) \\
&= \frac{e^2}{e^2-1} - \frac{1+e^2+e^4+e^6}{e^6} \\
&= \frac{e^8 - e^6(e^2-1) - e^4(e^2-1) - e^2(e^2-1) - (e^2-1)}{e^6(e^2-1)} \\
&= \frac{e^8 - e^8 + e^6 - e^6 + e^4 - e^4 + e^2 - e^2 + 1}{e^6(e^2-1)} \\
&= \frac{1}{e^6(e^2-1)}.
\end{aligned}$$

c) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-3)^k}{\pi^{2k}}$
Notera att serien kan skrivas som

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-3)^k}{\pi^{2k}} = \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{-3}{\pi^2}\right)^k,$$

som nästan är Maclaurinserien för $\frac{1}{1-x}$ med $x = \frac{-3}{\pi^2}$. Vi får att

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{-3}{\pi^2}\right)^k &= \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{-3}{\pi^2}\right)^k - \frac{3}{\pi^2} + \frac{3}{\pi^2} + 1 - 1 = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-3}{\pi^2}\right)^k + \frac{3}{\pi^2} - 1 \\
&= \frac{1}{1+\frac{3}{\pi^2}} + \frac{3-\pi^2}{\pi^2} = \frac{\pi^2}{\pi^2+3} + \frac{3-\pi^2}{\pi^2} = \frac{\pi^4 + (9-\pi^4)}{\pi^2(\pi^2+3)} \\
&= \frac{9}{\pi^2(\pi^2+3)}.
\end{aligned}$$

d) $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi^3}{2^6 3!} + \frac{\pi^5}{2^{10}5!} - \frac{\pi^7}{2^{14}7!} + ...$

Notera att serien kan skrivas som

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{\pi}{2^2}\right)^{2k+1},$$

varav vi ser att detta är Maclaurinutvecklingen för $\sin(x)$ med $x = \frac{\pi}{4}$. Alltså är seriens värde $\sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$.