TMV225
Kapitel 6

Övning 6.1

Lös ekvationen.

a) $5x + 3 = 15$

$$5x + 3 = 15 \implies 5x = 12 \implies x = \frac{12}{5}.$$

b) $2x^2 - 5 = 3x$

$$2x^2 - 5 = 3x \implies x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} = 0 \implies x = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{40}{16}} = \frac{3 \pm 7}{4},$$

vilket ger $x_1 = -1$ och $x_2 = 5/2$.

c) $(x+5)(x-5) = 0$

$$x = \pm 5.$$

d) $2x^3 - x^2 + 10 = 11x$

Notera att $x = 1$ är en lösning till ekvationen. Med polynomdivision får vi att

$$\begin{array}{rr|l}
 & 2x^3 - x^2 - 11x + 10 & 2x^2 + x - 10 \\
- & 2x^3 - 2x^2 \phantom{{}- 11x + 10} & \overline{x - 1} \\
\hline
- & x^2 - 11x + 10 & \\
 & x^2 - x \phantom{{}+10} & \\
\hline
- & -10x + 10 & \\
 & -10x + 10 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}$$

och alltså kan vi skriva ekvationen som

$$(x-1)(2x^2 + x - 10) = 0.$$

De två sista lösningarna ges från

$$x^2 + \frac{1}{2}x - 5 = 0 \implies x = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{80}{16}} = \frac{-1 \pm 9}{4},$$

dvs vi får $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -5/2$.

Övning 6.2

Bestäm funktionens rötter.

a) $f(x) = \exp(x) - \exp(2x+1)$
Vi ska alltså finna de x sådana att $f(x) = 0$. Vi kan skriva ekvationen som

$$e^x - e^{2x+1} = 0 \implies ee^{2x} - e^x = 0.$$

Låt $t = e^x$ så får vi att

$$t^2 - \frac{1}{e}t = 0 \implies t(t - \frac{1}{e}) = 0,$$

vilket ger lösningarna $t_1 = 0$ och $t_2 = e^{-1}$, varav vi får lösningen $x = -1$ (eftersom $e^x \neq 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$).

b) $f(x) = 3x^3 - 1$

$$f(x) = 0 \implies x^3 = \frac{1}{3} \implies x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}.$$

c) $f(x) = \sin(5\pi x)$

$$\sin(5\pi x) = 0 \implies 5\pi x = \pi n \implies x = \frac{n}{5}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

d) $f(x) = \sin(2x) - \cos(2x)$

$$\sin(2x) = \cos(2x) \implies 2x = \frac{\pi}{4} + \pi n \implies x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Övning 6.3

Bestäm funktionens fixpunkter.

a) $g(x) = 5x + 3$
Vi ska alltså lösa ekvationen $g(x) = x$.

$$x = 5x + 3 \implies 4x = -3 \implies x = -3/4.$$

b) $g(x) = (x+2)(x-2)$

$$x = (x+2)(x-2) \implies x^2 - x - 4 = 0 \implies x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{16}{4}} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

c) $g(x) = x$
Uppfyllt av alla $x \in \mathbb{R}$.

d) $g(x) = x^{11}$
Först notera att $x = 0$ löser ekvationen. Sedan noteras att vi även har ekvationen löst för de x sådana att

$$x^{10} = 1,$$

dvs $x = \pm 1$.

Övning 6.4

Skriv om ekvationen på fixpunktsform på två olika sätt.

a) $5x + 3 = 15$
Vi ska alltså skriva om ekvationen på formen $g(x) = x$. Ett sätt kan vara att helt enkelt lösa ut x och låta $g(x)$ vara det andra ledet, dvs

$$g(x) = 12/5 = x.$$

Vidare kan vi flytta över allt som inte är x och få att

$$5x + 3 = 15 \implies x + 4x + 3 = 15 \implies x = 12 - 4x = g(x).$$

b) $2x^2 - 5 = 3x$
Ett förslag är

$$2x^2 - 5 = 3x \implies x = \frac{2x^2 - 5}{3}$$

och ett annat

$$2x^2 - 5 = 3x \implies 2x^2 = 3x + 5 \implies x = \frac{3x + 5}{2x}.$$

c) $(x + 5)(x - 5) = 0$

$$\begin{aligned} 0 = (x+5)(x-5) &\implies x = x + (x+5)(x-5), \\ 0 = -(x+5)(x-5) &\implies x = x - (x+5)(x-5). \end{aligned}$$

d) $2x^3 - x^2 + 10 = 11x$

$$\begin{aligned} 11x = 2x^3 - x^2 + 10 &\implies x = \frac{2x^3 - x^2 + 10}{11}, \\ 0 = 2x^3 - x^2 + 10 - 11x &\implies x = x + 2x^3 - x^2 + 10 - 11x. \end{aligned}$$

Övning 6.5

Bestäm antalet lösningar till ekvationen.

a) $(x + 1)(x + 2) \cdots (x + 100) = 0$
Det blir en lösning för varje parentes ($x = -1$ för första och $x = -100$ för sista).

b) $x = 2\sin(x)$

Skriv $f(x) = x - 2\sin(x)$ och analysera hur många lösningar ekvationen $f(x) = 0$ har (dvs hur många gånger funktionen skär y-axeln). Till att börja med noterar vi att $x_1 = 0$ är en lösning till ekvationen. Vidare gäller att

$$f(-x) = -x - 2\sin(-x) = -x + 2\sin(x) = -(x - 2\sin(x)) = -f(x),$$

vilket visar att f är en udda funktion. Detta betyder att om $f(x)$ har en positiv rot $\bar{x}$ kommer den även ha en rot i $-\bar{x}$. Vi behöver alltså endast analysera för $x > 0$. Vidare ser vi att eftersom $|\sin(x)| \leq 1$ för alla x så är $x - 2\sin(x) > 0$ för alla $x > 2$, och om f har fler rötter ligger de alltså i intervallet $(0, 2]$. Vi kan kolla $f'(x) = 0$ för att finna möjliga lokala extrempunkter i intervallet. Vi får

$$f'(x) = 1 - 2\cos(x) = 0 \implies x = \frac{\pi}{3},$$

eftersom $\pi/3$ är enda punkten i intervallet vi kollar på som uppfyller ekvationen. Vi noterar att i den här punkten gäller att $f(\pi/3) = \pi/3 - \sqrt{3} < 0$. Som tidigare nämnt kommer $x - 2\sin(x) > 0$ för alla $x > 2$, vilket betyder att f kommer skära y-axeln en gång på intervallet $(0, 2)$ och därmed även en gång på $(-2, 0)$ eftersom f är udda. Totalt får vi alltså tre lösningar.

c) $x^2 + 2 = \sin(x)$

Notera att minsta värdet som vänsterledet kan anta är 2, eftersom $x^2 \leq 0$ för alla x. Däremot är $\sin(x) \leq 1$, vilket visar att vi inte kan ha någon lösning till ekvationen.

d) $\ln(x^3) = \ln(2x)$

Vi kan skriva om ekvationen med hjälp av logaritmlagarna enligt

$$\ln(x^3) = \ln(2x) \implies 3\ln(x) = \ln(x) + \ln(2) \implies \ln(x) = \frac{1}{2}\ln(2) = \ln(\sqrt{2}),$$

vilket har en lösning $x = \sqrt{2}$.

Övning 6.6

Avgör, om möjligt, med hjälp av Bolzanos sats huruvida funktionen har rötter på intervallet $[0, 1]$.

a) $f(x) = (x + 1)(x + 2)$

Bolzanos sats säger att om f är kontinuerlig på slutna och begränsade intervallet $[a, b]$ och $f(a) \cdot f(b) < 0$, så har ekvationen $f(x) = 0$ (minst) en rot $\bar{x}$ på det öppna intervallet (a, b), dvs

$$\exists \bar{x} \in (a, b) : f(\bar{x}) = 0.$$

Vi har en kontinuerlig funktionen på slutna och begränsade intervallet $[0, 1]$. Vi har dock att $f(0) \cdot f(1) = 2 \cdot 6 > 0$, och har därför inte antagandena för Bolzanos sats uppfyllda, och kan därför ej avgöra med satsen huruvida det finns en rot eller inte.

b) $\cos(17\pi x)$

Här har vi att

$$f(0) \cdot f(1) = \cos(0) \cdot \cos(17\pi) = 1 \cdot (-1) < 0,$$

vilket betyder att det finns minst en rot på intervallet.

c) $f(x) = \ln(0.999 + x^{15})$

Här har vi att

$$f(0) \cdot f(1) = \underbrace{\ln(0.999)}_{<0} \cdot \underbrace{\ln(1.999)}_{>0} < 0,$$

och alltså finns en rot enligt satsen.

d) $f(x) = (x+1)/(x-1.5)$
Här har vi att

$$f(0) \cdot f(1) = \frac{1}{-1.5} \cdot \frac{2}{-0.5} > 0,$$

och alltså kan vi ej avgöra påståendet med hjälp av satsen då antagandena ej är uppfyllda.

Övning 6.7

Bestäm en approximativ lösning till ekvationen genom att utföra tre iterationer i bisektionsalgoritmen (manuellt) på intervallet $[a, b] = [0, 2]$ (beräkna $\hat{x}_3$).

a) $x^2 = 2$
Vi börjar med att skriva på formen $f(x) = x^2 - 2$ tillämpar bisektionsalgoritmen på intervallet $[0, 2]$. Notera att $f(0) < 0$ och $f(2) > 0$ (alltså funktionens värde i ändpunkterna har olika tecken) vilket är ett krav för att starta bisektion. Först får vi i punkten $\hat{x}_0 = (2+0)/2 = 1$ att

$$f(1) = 1 - 2 = -1 < 0,$$

vilket ger att roten ligger mellan $[1, 2]$ och gör detta till vårt nya intervall och upprepar proceduren. För $\hat{x}_1 = (2+1)/2 = 3/2$ får vi

$$f(3/2) = \frac{9}{4} - \frac{8}{4} = \frac{1}{4} > 0,$$

och alltså är vårt nya intervall $[1, 1.5]$. För $\hat{x}_2 = \frac{5}{4}$ får vi

$$f(5/4) = \frac{25}{16} - \frac{32}{16} = -\frac{7}{16} < 0,$$

och vårt nya intervall blir $[1.25, 1.5]$. Vår approximation blir då mittpunkten $\hat{x}_3 = 1.375$.

b) $x^3 = 2$
Skriv $f(x) = x^3 - 2$. Notera att $f(0) < 0$ och $f(2) > 0$. För $\hat{x}_0 = 1$ får vi

$$f(1) = -1 < 0,$$

och vårt nya intervall blir $[1, 2]$. För $\hat{x}_1 = 3/2$ får vi

$$f(3/2) = \frac{27}{8} - \frac{16}{8} = \frac{11}{8} > 0,$$

och vårt nya intervall blir $[1, 1.5]$. För $\hat{x}_2 = 5/4$ får vi

$$f(5/4) = \frac{125}{64} - \frac{128}{64} = -\frac{3}{64} < 0,$$

och vårt nya intervall blir $[1.25, 1.5]$. Vi får alltså $\hat{x}_3 = 1.375$.

c) $x^5 + 7x^2 = 8x + 1$

Skriv $f(x) = x^5 + 7x^2 - 8x - 1$. Notera att $f(0) < 0$ och $f(2) > 0$. För $\hat{x}_0 = 1$ får vi

$$f(1) = 1 + 7 - 8 - 1 = -1 < 0,$$

och vårt nya intervall blir $[1, 2]$. För $\hat{x}_1 = 3/2$ får vi

$$f(3/2) = \frac{243}{32} + \frac{7 \cdot 9}{4} - \frac{8 \cdot 3}{2} - 1 = \frac{243 + 63 \cdot 8 - 24 \cdot 16 - 32}{32} = \frac{331}{32} > 0,$$

och vårt nya intervall blir $[1, 1.5]$. För $\hat{x}_2 = 5/4$ får vi (med räknare)

$$f(5/4) = \frac{3061}{1024} > 0$$

och vårt nya intervall blir $[1, 1.25]$. Vi får alltså $\hat{x}_3 = 1.125$.

d) $(x - 0.01)(x + 10) = 0$
Notera att $f(0) < 0$ och $f(2) > 0$. För $\hat{x}_0 = 1$ får vi

$$f(1) = (1 - 0.01)(1 + 10) > 0,$$

och vårt nya intervall blir $[0, 1]$. För $\hat{x}_1 = 0.5$ får vi

$$f(0.5) = (0.5 - 0.01)(0.5 + 10) > 0$$

och vårt nya intervall blir $[0, 0.5]$. För $\hat{x}_2 = 0.25$ får vi (med räknare)

$$f(0.25) = (0.25 - 0.01)(0.25 + 10) > 0$$

och vårt nya intervall blir $[0, 0.25]$. Vi får alltså $\hat{x}_3 = 0.125$.

Övning 6.8

Bestäm en approximativ lösning till ekvationen $x^2 + 2x = 1$ genom att utföra tre iterationer i bisektionsalgoritmen (manuellt) på intervallet $[a, b]$ (beräkna $\hat{x}_3$).

a) $[a, b] = [0, 1]$
Skriv $f(x) = x^2 + 2x - 1 = (x + 1)^2 - 2$. Notera att $f(0) < 0$ och $f(1) > 0$. För $\hat{x}_0 = 1/2$ får vi

$$f(1/2) = \frac{9}{4} - \frac{8}{4} > 0$$

och vårt nya intervall blir $[0, 0.5]$. För $\hat{x}_1 = 0.25$ får vi

$$f(0.75) = 1.25^2 - 2 < 0$$

och vårt nya intervall blir $[0.25, 0.5]$. För $\hat{x}_2 = 0.375$ får vi

$$f(0.25) = 1.375^2 - 2 < 0$$

och vårt nya intervall blir $[0.375, 0.5]$. Vi får alltså $\hat{x}_3 = 0.4375$.

b) $[a, b] = [0, 2]$

Notera att $f(0) < 0$ och $f(2) > 0$. För $\hat{x}_0 = 1$ får vi

$$f(1) = 4 - 2 > 0$$

och vårt nya intervall blir $[0, 1]$. För $\hat{x}_1 = 0.5$ får vi

$$f(0.5) = 1.5^2 - 2 > 0$$

och vårt nya intervall blir $[0, 0.5]$. För $\hat{x}_2 = 0.25$ får vi

$$f(0.25) = 1.25^2 - 2 < 0$$

och vårt nya intervall blir $[0.25, 0.5]$. Vi får alltså $\hat{x}_3 = 0.375$.

c) $[a, b] = [0, 3]$
Notera att $f(0) < 0$ och $f(3) > 0$. För $\hat{x}_0 = 1.5$ får vi

$$f(1.5) = 2.5^2 - 2 > 0$$

och vårt nya intervall blir $[0, 1.5]$. För $\hat{x}_1 = 0.75$ får vi

$$f(0.75) = 1.75^2 - 2 > 0$$

och vårt nya intervall blir $[0, 0.75]$. För $\hat{x}_2 = 0.375$ får vi

$$f(0.375) = 1.375^2 - 2 < 0$$

och vårt nya intervall blir $[0.375, 0.75]$. Vi får alltså $\hat{x}_3 = 0.5625$.

d) $[a, b] = [0, 1000]$
Notera att $f(0) < 0$ och $f(1000) > 0$. För $\hat{x}_0 = 500$ får vi

$$f(1.5) = 500^2 - 2 > 0$$

och vårt nya intervall blir $[0, 500]$. För $\hat{x}_1 = 250$ får vi

$$f(250) = 250^2 - 2 > 0$$

och vårt nya intervall blir $[0, 250]$. För $\hat{x}_2 = 125$ får vi

$$f(125) = 125^2 - 2 > 0$$

och vårt nya intervall blir $[0, 125]$. Vi får alltså $\hat{x}_3 = 62.5$.

Övning 6.9

Bestäm en approximativ lösning till ekvationen $x^7 = 0$ genom att utföra 100 iterationer i bisektionsalgoritmen (med finess) på intervallet $[a, b]$ (beräkna $\hat{x}_{100}$).

a) $[a, b] = [-1, 1]$
Notera att $f(-1) < 0$ och $f(1) > 0$. Vi får att $\hat{x}_0 = 0$ ger $f(0) = 0$, och vi har därför hittat en rot. Efter 100 iterationer är vi fortfarande på samma rot, dvs $\hat{x}_{100} = \hat{x}_0 = 0$.

b) $[a, b] = [-1 \times 10^{-100}, 1]$

Vi utför en iteration och ser att med $\hat{x}_0 = \frac{1-10^{-100}}{2}$, har vi

$$f\left(\frac{1-10^{-100}}{2}\right) > 0,$$

och därmed är nästa intervall $I_1 = \left[-1 \times 10^{-100}, \frac{1-10^{-100}}{2}\right]$. För $\hat{x}_1 = \frac{\frac{1-10^{-100}}{2} - 2\cdot 10^{-100}}{2} = \frac{1-10^{-100}-2\cdot10^{-100}}{2^2}$ får vi att

$$f\left(\frac{1-3\cdot 10^{-100}}{2^2}\right) > 0,$$

och därmed är nästa intervall $I_2 = \left[-1 \times 10^{-100}, \frac{1-3\cdot10^{-100}}{2^2}\right]$. Därefter får vi $\hat{x}_2 = \frac{1-3\cdot10^{-100}-4\cdot10^{-100}}{2^3}$ och

$$f\left(\frac{1-7\cdot 10^{-100}}{2^3}\right) > 0,$$

och därmed är nästa intervall $I_3 = \left[-1 \times 10^{-100}, \frac{1-7\cdot10^{-100}}{2^3}\right]$. Fortsättningsvis ger detta att $I_{100} = \left[-1 \times 10^{-100}, \frac{1-(2^{100}-1)\cdot10^{-100}}{2^{100}}\right]$, och vi får därför att

$$\begin{aligned}\hat{x}_{100} &= \frac{\frac{1-(2^{100}-1)\cdot10^{-100}}{2^{100}} - 10^{-100}}{2} \\ &= \frac{1-2^{100}\cdot10^{-100}+10^{-100}-2^{100}\cdot10^{-100}}{2^{101}} \\ &= 2^{-101}(1+10^{-100}) - 10^{-100}\end{aligned}$$

c) $[a,b] = [-1, 1\times 10^{-100}]$
Med beräkningar analoga med föregående deluppgift ges att

$$\hat{x}_{100} = -2^{-101}(1+10^{-100}) + 10^{-100}.$$

d) $[-2^{-100}, 1]$
Vi utför en iteration och ser att för $\hat{x}_0 = \frac{1-2^{-100}}{2}$ har vi

$$f\left(\frac{1-2^{-100}}{2}\right) > 0,$$

och därmed är nästa intervall $I_1 = \left[-2^{-100}, \frac{1-2^{-100}}{2}\right]$. För $\hat{x}_1 = \frac{\frac{1-2^{-100}}{2} - 2^{-100}}{2} = \frac{1-2^{-100}-2\cdot2^{-100}}{2^2}$ får vi

$$f\left(\frac{1-3\cdot 2^{-100}}{2^2}\right) > 0,$$

och därmed är nästa intervall $I_2 = \left[-2^{-100}, \frac{1-3\cdot2^{-100}}{2^2}\right]$. Fortsättningsvis ges att

$$I_{100} = \left[-2^{-100}, \frac{1-(2^{100}-1)\cdot 2^{-100}}{2^{100}}\right]$$

och därmed

$$\hat{x}_{100} = \frac{\frac{1-(2^{100}-1)\cdot2^{-100}}{2^{100}} - 2^{-100}}{2} = \frac{1-(2^{100}-1)\cdot2^{-100}-1}{2^{101}} = \frac{-1+2^{-100}}{2^{101}} = -\frac{2^{-100}}{2}(1-2^{-100}).$$

Övning 6.10

Bestäm, med hjälp av satsen om mellanliggande värden, det minsta heltalsintervall på vilket funktionen antar värdet π

a) $f(x) = x^2$

Satsen om mellanliggande värden säger att om en funktion f är kontinuerlig på det slutna och begränsade intervallet $[a, b]$, så antar den alla värden mellan $f(a)$ och $f(b)$. Vi ska alltså hitta det heltalsintervall $I = [\min(f(a), f(b)), \max(f(a), f(b))]$ så att det finns ett $x \in (a, b)$ sådant att $f(x) = \pi \in I$. Vi ser att detta x ges av $x = \pm\sqrt{\pi}$ och alltså kan intervallet vara antingen $(1, 2)$ eller $(-2, -1)$.

b) $f(x) = x^3$

Här ges argumentet av $x = \sqrt[3]{x} \in (1, 2)$.

c) $f(x) = \ln(3x)$

Vi löser ut x och ser att detta ges av $x = e^\pi/3 \approx 7.71$, vilket ger oss heltalsintervallet $(7, 8)$.

d) $f(x) = \exp(3x)$

Vi löser ut x och ser att detta ges av $x = \ln(\pi)/3 \approx 0.38 \in (0, 1)$.

Övning 6.11

Bestäm Lipschitz-konstanten L_g och avgör om funktionen är en kontraktion på intervallet $[0, 1]$.

a) $g(x) = 0.5x$

För att g ska vara en kontraktion så ska det gälla att $g : [0, 1] \to [0, 1]$ med Lipschitz-konstant $L_g < 1$. I kapitel 4 lärde vi oss att en funktions bästa Lipschitz-konstant ges av $L_g = \sup |g'|$ (se Sats 4.12). Lipschitz-konstanten för $g(x) = 0.5x$ kan alltså tas genom att notera att $g'(x) = 0.5$ och alltså $L_g = \sup |g'| = 0.5$. Vidare gäller att för ett värde $x \in [0, 1]$ så är $g(x) \in [0, 1]$ och alltså $g : [0, 1] \to [0, 1]$. Alltså är g en kontraktion på $[0, 1]$.

b) $g(x) = 0.5x + 1$

Liksom i föregående uppgift ges Lipschitz-konstanten av $L_g = \sup |g'| = \sup |0.5| = 0.5$, men i det här fallet kommer $x \in [0, 1]$ ge ett funktionsvärde $g(x) \in [1, 2]$, vilket medför att g inte är en kontraktion.

c) $g(x) = \sin(x)$

Ett värde $x \in [0, 1]$ kommer ge ett funktionsvärde $g(x) \in [0, 1]$. För Lipschitz-konstanten ser vi att $L_g = \sup |g'| = 1$, eftersom $g'(x) = \cos(x)$. Alltså är inte g en kontraktion eftersom $L_g \geq 1$.

d) $g(x) = 0.999x(1 - x)$

Då $x(1 - x) < 1$ för alla $x \in [0, 1]$ så gäller att $g : [0, 1] \to [0, 1]$. Vidare ges att $g'(x) = 0.999(1 - 2x)$ och därmed $L_g = \sup |g'| = 0.999$, vilket medför att g är en kontraktion.

Övning 6.12

Bestäm Lipschitz-konstanten L_g och avgör om funktionen $g(x) = x/2 + 3/x$ är en kontraktion på intervallet I.

a) $I = [0, 1]$

Derivatan ges av $g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{x^2}$. När x närmar sig 0 går derivatan alltså mot ∞, och därmed är funktionen ej Lipschitz-kontinuerlig (eftersom $L_g = \sup |g'| = \infty$).

b) $I = [1, 2]$

Här får vi att

$$L_g = \sup_{x\in[1,2]} \left|\frac{1}{2} - \frac{3}{x^2}\right| = \left|\frac{1}{2} - \frac{3}{1}\right| = 5/2,$$

och alltså är funktionen ej en kontraktion.

c) $I = [2, 3]$

Här får vi att

$$L_g = \sup_{x\in[2,3]} \left|\frac{1}{2} - \frac{3}{x^2}\right| = \left|\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right| = 1/4,$$

vilket medför att $L_g < 1$. Vidare gäller att $g : [2, 3] \to [2, 3]$, och alltså är funktionen en kontraktion.

d) $I = [3, 4]$

Här får vi att

$$L_g = \sup_{x\in[1,2]} \left|\frac{1}{2} - \frac{3}{x^2}\right| = \left|\frac{1}{2} - \frac{3}{16}\right| = 5/16,$$

och därmed $L_g < 1$. Dock gäller att $g(3) = 5/2 \notin [3, 4]$, vilket ger att g ej är en kontraktion.

Övning 6.13

Bestäm en approximativ lösning till ekvationen genom att utföra tre iterationer i fixpunktsalgoritmen (manuellt). Tag $g(x) = x + \alpha f(x)$ med $f(x) = \text{VL} - \text{HL}$ med $x_0 = 1$ och välj $\alpha = -0.1$.

a) $x^2 = 2$

Vi får $f(x) = x^2 - 2$ och har startgissning $x_0 = 1$. Med $\alpha = -0.1$ ges

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + \alpha f(x_0) = 1 - 0.1(1^2 - 2) = 1.1,\\
x_2 &= x_1 + \alpha f(x_1) = 1.1 - 0.1(1.1^2 - 2) = 1.179,\\
x_3 &= x_2 + \alpha f(x_2) = 1.179 - 0.1(1.179^2 - 2) = 1.2399959.
\end{aligned}$$

b) $x^3 = 2$

Vi får $f(x) = x^3 - 2$ och har startgissning $x_0 = 1$. Med $\alpha = -0.1$ ges

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + \alpha f(x_0) = 1 - 0.1(1^3 - 2) = 1.1,\\
x_2 &= x_1 + \alpha f(x_1) = 1.1 - 0.1(1.1^3 - 2) = 1.1669,\\
x_3 &= x_2 + \alpha f(x_2) = 1.1669 - 0.1(1.1669^3 - 2) = 1.2080084068691.
\end{aligned}$$

c) $x^5 + 7x^2 = 8x + 1$

Vi får $f(x) = x^5 + 7x^2 - 8x - 1$ och har startgissning $x_0 = 1$. Med $\alpha = -0.1$ ges

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + \alpha f(x_0) = 1 - 0.1(1^5 + 7 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 - 1) = 1.1,\\
x_2 &= x_1 + \alpha f(x_1) = 1.1 - 0.1(1.1^5 + 7 \cdot 1.1^2 - 8 \cdot 1.1 - 1) = 1.071949,\\
x_3 &= x_2 + \alpha f(x_2) = 1.071949 - 0.1(1.071949^5 + 7 \cdot 1.071949^2 - 8 \cdot 1.071949 - 1) \approx 1.0836187.
\end{aligned}$$

d) $(x - 0.01)(x + 10) = 0$

Vi får $f(x) = (x - 0.01)(x + 10)$ och har startgissning $x_0 = 1$. Med $\alpha = -0.1$ ges

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + \alpha f(x_0) = 1 - 0.1(1 - 0.01)(1 + 10) = -0.089, \\
x_2 &= x_1 + \alpha f(x_1) = -0.089 - 0.1(-0.089 - 0.01)(-0.089 + 10) = 0.0091189, \\
x_3 &= x_2 + \alpha f(x_2) = 0.0091189 - 0.1(0.0091189 - 0.01)(0.0091189 + 10) \approx 0.010000803.
\end{aligned}$$

Övning 6.14

Bestäm en approximativ lösning till ekvationen $x^2 + 2x = 1$ genom att utföra tre iterationer i fixpunktsalgoritmen (manuellt). Tag $g(x) = x + \alpha f(x)$ och $x_0 = 1$.

a) $\alpha = 0.1$
Vi har $f(x) = x^2 + 2x - 1$ och startgissning $x_0 = 1$. Med $\alpha = 0.1$ får vi

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + \alpha f(x_0) = 1 + 0.1(1^2 + 2 \cdot 1 - 1) = 1.2, \\
x_2 &= x_1 + \alpha f(x_1) = 1.2 + 0.1(1.2^2 + 2 \cdot 1.2 - 1) = 1.484, \\
x_3 &= x_2 + \alpha f(x_2) = 1.484 + 0.1(1.484^2 + 2 \cdot 1.484 - 1) = 1.9010256.
\end{aligned}$$

b) $\alpha = -0.1$
Vi har $f(x) = x^2 + 2x - 1$ och startgissning $x_0 = 1$. Med $\alpha = -0.1$ får vi

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + \alpha f(x_0) = 1 - 0.1(1^2 + 2 \cdot 1 - 1) = 0.8, \\
x_2 &= x_1 + \alpha f(x_1) = 0.8 - 0.1(0.8^2 + 2 \cdot 0.8 - 1) = 0.676, \\
x_3 &= x_2 + \alpha f(x_2) = 0.676 - 0.1(0.676^2 + 2 \cdot 0.676 - 1) = 0.5951024.
\end{aligned}$$

c) $\alpha = 0.0$
Vi har $f(x) = x^2 + 2x - 1$ och startgissning $x_0 = 1$. Med $\alpha = 0.0$ får vi

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + \alpha f(x_0) = 1 + 0.0(1^2 + 2 \cdot 1 - 1) = 1, \\
x_2 &= x_1 + \alpha f(x_1) = 1 + 0.0(1^2 + 2 \cdot 1 - 1) = 1, \\
x_3 &= x_2 + \alpha f(x_2) = 1 + 0.0(1^2 + 2 \cdot 1 - 1) = 1.
\end{aligned}$$

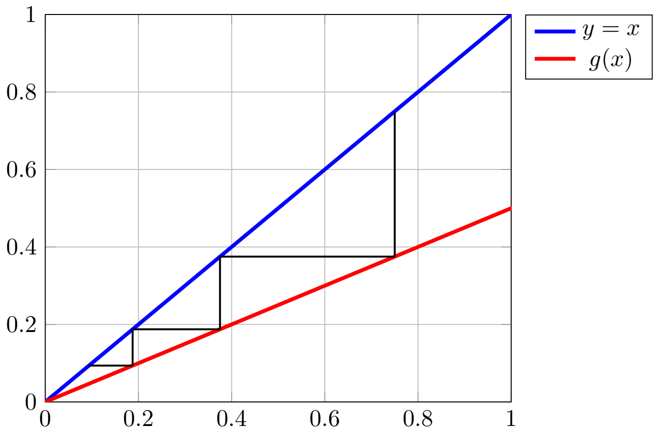
d) $\alpha = 1$
Vi har $f(x) = x^2 + 2x - 1$ och startgissning $x_0 = 1$. Med $\alpha = 1$ får vi

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + \alpha f(x_0) = 1 + (1^2 + 2 \cdot 1 - 1) = 3, \\
x_2 &= x_1 + \alpha f(x_1) = 3 + (3^2 + 2 \cdot 3 - 1) = 17, \\
x_3 &= x_2 + \alpha f(x_2) = 17 + (17^2 + 2 \cdot 17 - 1) = 339.
\end{aligned}$$

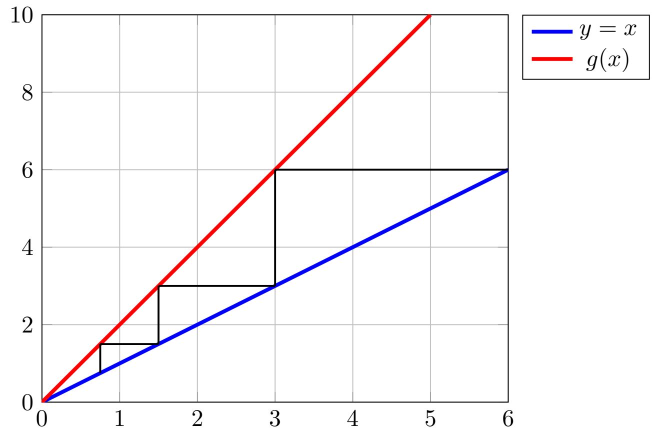
Övning 6.15

Rita ett diagram som illustrerar tre iterationer i fixpunktsalgoritmen för funktionen g. Tag $x_0 = 0.75$. Rita funktionen g tillsammans med grafen för $y = x$ och markera iterationerna i diagrammet.

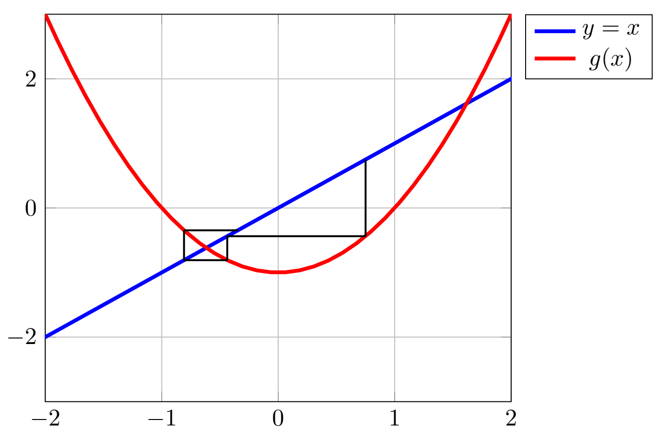
a) $g(x) = 0.5x$



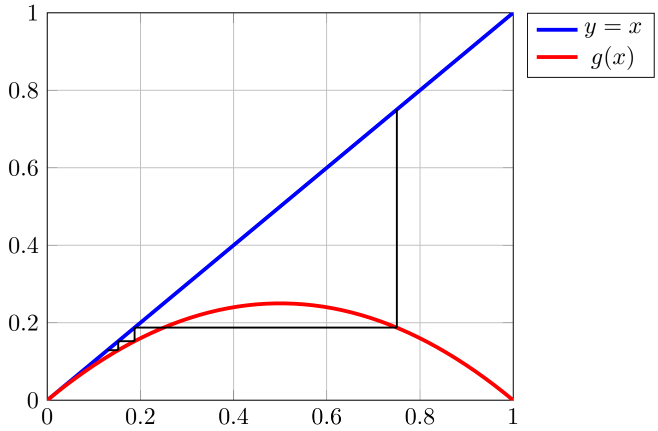
b) $g(x) = 2x$



c) $g(x) = x^2 - 1$



d) $g(x) = x(1 - x)$



Övning 6.16

Formulera Newtons metod för ekvationen.

a) $x^2 = 2$

Newtons metod är en fixpunktsiteration på formen

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, 3, ...,$$

med givet startvärde $x_0 \in \mathbb{R}$. Vi har $f(x) = x^2 - 2$ och därmed $f'(x) = 2x$. Newtons metod blir alltså

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}.$$

b) $x^3 = 2$

Vi har $f(x) = x^3 - 2$ och därmed $f'(x) = 3x^2$. Newtons metod blir alltså

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2}{3x_n^2}.$$

c) $x^5 + 7x^2 = 8x + 1$

Vi har $f(x) = x^5 + 7x - 8x - 12$ och därmed $f'(x) = 5x^4 + 14x - 8$. Newtons metod blir alltså

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5 + 7x_n^2 - 8x_n - 1}{5x_n^4 + 14x_n - 8}.$$

d) $(x - 0.01)(x + 10) = 0$

Vi har $f(x) = (x - 0.01)(x + 10)$ och därmed $f'(x) = 2x + 9.99$. Newtons metod blir alltså

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - 0.01)(x_n + 10)}{2x_n + 9.99}.$$

Övning 6.17

Bestäm en approximativ lösning till ekvationen genom att utföra tre iterationer i Newtons metod (manuellt) med $x_0 = 1$. (Metoden finns för varje ekvation i föregående uppgift).

a) $x^2 = 2$

Vi utför metoden som är skriven i Övning 6.16a.

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{x_0^2 - 2}{2x_0} = 1 - \frac{1^2 - 2}{2 \cdot 1} = 1.5, \\ x_2 &= x_1 - \frac{x_1^2 - 2}{2x_1} = 1.5 - \frac{1.5^2 - 2}{2 \cdot 1.5} \approx 1.4166667, \\ x_3 &= x_2 - \frac{x_2^2 - 2}{2x_2} \approx 1.4166667 - \frac{1.4166667^2 - 2}{2 \cdot 1.4166667} \approx 1.4142157. \end{aligned}$$

b) $x^3 = 2$

Vi utför metoden som är skriven i Övning 6.16b.

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{x_0^3 - 2}{3x_0^2} = 1 - \frac{1^3 - 2}{3 \cdot 1^2} \approx 1.33333, \\ x_2 &= x_1 - \frac{x_1^3 - 2}{3x_1^2} \approx 1.33333 - \frac{1.33333^3 - 2}{3 \cdot 1.33333^2} \approx 1.26389, \\ x_3 &= x_2 - \frac{x_2^3 - 2}{3x_2^2} \approx 1.26389 - \frac{1.26389^3 - 2}{3 \cdot 1.26389^2} \approx 1.2599335. \end{aligned}$$

c) $x^5 + 7x^2 = 8x + 1$

Vi utför metoden som är skriven i Övning 6.16c.

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{x_0^5 + 7x_0^2 - 8x_0 - 1}{5x_0^4 + 14x_0 - 8} = 1 - \frac{1^5 + 7 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 - 1}{5 \cdot 1^4 + 14 \cdot 1 - 8} = 1.090909..., \\ x_2 &= x_1 - \frac{x_1^5 + 7x_1^2 - 8x_1 - 1}{5x_1^4 + 14x_1 - 8} = 1.09091 - \frac{1.09091^5 + 7 \cdot 1.09091^2 - 8 \cdot 1.09091 - 1}{5 \cdot 1.09091^4 + 14 \cdot 1.09091 - 8} \approx 1.080574, \\ x_3 &= x_2 - \frac{x_2^5 + 7x_2^2 - 8x_2 - 1}{5x_2^4 + 14x_2 - 8} = 1.08057 - \frac{1.08057^5 + 7 \cdot 1.08057^2 - 8 \cdot 1.08057 - 1}{5 \cdot 1.08057^4 + 14 \cdot 1.08057 - 8} \approx 1.0804215. \end{aligned}$$

d) $(x - 0.01)(x + 10) = 0$

Vi utför metoden som är skriven i Övning 6.16d.

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{(x_0 - 0.01)(x_0 + 10)}{2x_0 + 9.99} = 1 - \frac{(1 - 0.01)(1 + 10)}{2 \cdot 1 + 9.99} \approx 0.091743, \\ x_2 &= x_1 - \frac{(x_1 - 0.01)(x_1 + 10)}{2x_1 + 9.99} \approx 0.091743 - \frac{(0.091743 - 0.01)(0.091743 + 10)}{2 \cdot 0.091743 + 9.99} \approx 0.010656, \\ x_3 &= x_2 - \frac{(x_2 - 0.01)(x_2 + 10)}{2x_2 + 9.99} \approx 0.010656 - \frac{(0.010656 - 0.01)(0.010656 + 10)}{2 \cdot 0.010656 + 9.99} \approx 0.010000043. \end{aligned}$$

Övning 6.18

Formulera Newtons metod för ekvationen.

a) $x^2 + x + 1 = 0$

Vi har $f(x) = x^2 + x + 1$ och därmed $f'(x) = 2x + 1$. Newtons metod blir alltså

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 + x_n + 1}{2x_n + 1}.$$

b) $x = \cos(x)$

Vi har $f(x) = x - \cos(x)$ och därmed $f'(x) = 1 + \sin(x)$. Newtons metod blir alltså

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \cos(x_n)}{1 + \sin(x_n)}.$$

c) $x^2 + 2x + 1 = 0$

Vi har $f(x) = x^2 + 2x + 1$ och därmed $f'(x) = 2x + 2$. Newtons metod blir alltså

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 + 2x_n + 1}{2x_n + 2}.$$

d) $4\sin^2(\pi x) + 1 = 4\sin(\pi x),\ x \in [0, 1]$

Vi har $f(x) = 4\sin^2(\pi x) - 4\sin(\pi x) + 1$ och därmed $f'(x) = 8\pi\sin(\pi x)\cos(\pi x) - 4\pi\cos(\pi x) + 1$. Newtons metod blir alltså

$$x_{n+1} = x_n - \frac{4\sin^2(\pi x_n) - 4\sin(\pi x_n) + 1}{8\pi\sin(\pi x_n)\cos(\pi x_n) - 4\pi\cos(\pi x_n)}.$$

Övning 6.19

Bestäm en approximativ lösning till ekvationen genom att utföra tre iterationer i Newtons metod (manuellt) med $x_0 = 1$. (Metoden finns för varje ekvation i föregående uppgift).

a) $x^2 + x + 1 = 0$

Vi utför metoden som är skriven i Övning 6.18a.

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 - \frac{x_0^2 + x_0 + 1}{2x_0 + 1} = 1 - \frac{1^2 + 1 + 1}{2 \cdot 1 + 1} = 0, \\
x_2 &= x_1 - \frac{x_1^2 + x_1 + 1}{2x_1 + 1} = 0 - \frac{0^2 + 0 + 1}{2 \cdot 0 + 1} = -1, \\
x_3 &= x_2 - \frac{x_2^2 + x_2 + 1}{2x_2 + 1} = -1 - \frac{(-1)^2 - 1 + 1}{2 \cdot (-1) + 1} = 0.
\end{aligned}$$

b) $x = \cos(x)$

Vi utför metoden som är skriven i Övning 6.18b.

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 - \frac{x_0 - \cos(x_0)}{1 + \sin(x_0)} = 1 - \frac{1 - \cos(1)}{1 + \sin(1)} \approx 0.750364, \\
x_2 &= x_1 - \frac{x_1 - \cos(x_1)}{1 + \sin(x_1)} \approx 0.750364 - \frac{0.750364 - \cos(0.750364)}{1 + \sin(0.750364)} \approx 0.739113, \\
x_3 &= x_2 - \frac{x_2 - \cos(x_2)}{1 + \sin(x_2)} \approx 0.739113 - \frac{0.739113 - \cos(0.739113)}{1 + \sin(0.739113)} \approx 0.73908513,
\end{aligned}$$

c) $x^2 + 2x + 1 = 0$

Vi utför metoden som är skriven i Övning 6.18c.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_0 - \frac{x_0^2 + 2x_0 + 1}{2x_0 + 2} = 1 - \frac{1^2 + 2 \cdot 1 + 1}{2 \cdot 1 + 2} = 0, \\
x_2 &= x_1 - \frac{x_1^2 + 2x_1 + 1}{2x_1 + 2} = 0 - \frac{0^2 + 2 \cdot 0 + 1}{2 \cdot 0 + 2} = -0.5, \\
x_3 &= x_2 - \frac{x_2^2 + 2x_2 + 1}{2x_2 + 2} = -0.5 - \frac{(-0.5)^2 + 2 \cdot () + 1}{2 - 0.5 \cdot (-0.5) + 2} = -0.75.
\end{aligned}
$$

d) $4\sin^2(\pi x) + 1 = 4\sin(\pi x),\ x \in [0, 1]$

Vi utför metoden som är skriven i Övning 6.18d.

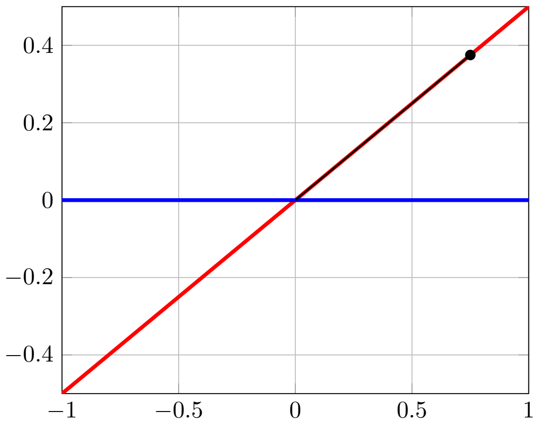
$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_0 - \frac{4\sin^2(\pi x_0) - 4\sin(\pi x_0) + 1}{8\pi \sin(\pi x_0)\cos(\pi x_0) - 4\pi\cos(\pi x_0)} \\
&= 1 - \frac{4\sin^2(\pi \cdot 1) - 4\sin(\pi \cdot 1) + 1}{8\pi \sin(\pi \cdot 1)\cos(\pi \cdot 1) - 4\pi\cos(\pi \cdot 1)} \approx 0.9204225, \\
x_2 &= x_1 - \frac{4\sin^2(\pi x_1) - 4\sin(\pi x_1) + 1}{8\pi \sin(\pi x_1)\cos(\pi x_1) - 4\pi\cos(\pi x_1)} \\
&\approx 0.9204225 - \frac{4\sin^2(\pi \cdot 0.9204225) - 4\sin(\pi \cdot 0.9204225) + 1}{8\pi \sin(\pi \cdot 0.9204225)\cos(\pi \cdot 0.9204225) - 4\pi\cos(\pi \cdot 0.9204225)} \approx 0.878931, \\
x_3 &= x_2 - \frac{4\sin^2(\pi x_2) - 4\sin(\pi x_2) + 1}{8\pi \sin(\pi x_2)\cos(\pi x_2) - 4\pi\cos(\pi x_2)} \\
&\approx 0.878931 - \frac{4\sin^2(\pi \cdot 0.878931) - 4\sin(\pi \cdot 0.878931) + 1}{8\pi \sin(\pi \cdot 0.878931)\cos(\pi \cdot 0.878931) - 4\pi\cos(\pi \cdot 0.878931)} \approx 0.85686169.
\end{aligned}
$$

Övning 6.20

Rita ett diagram som illustrerar tre iterationer i Newtons metod för ekvationen. Tag $x_0 = 0.75$.

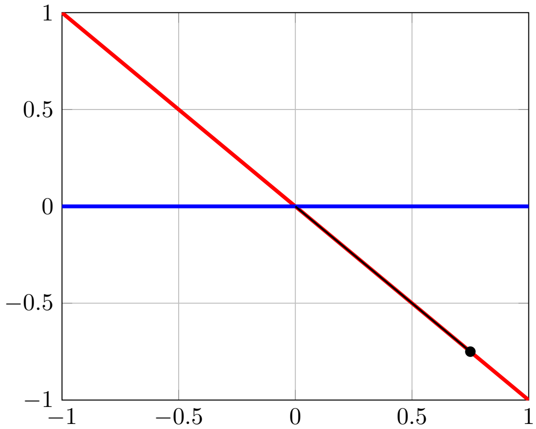
a) $x = 0.5x$

För varje iteration har vi att vi följer tangenten (linjäriseringen) för att vinna nästa iteration på x-axeln. Vi kollar för $f(x) = x - 0.5x = 0$. I det här fallet följer vi alltså tangenten ner till $x = 0$ och stannar sedan där i övriga iterationer.



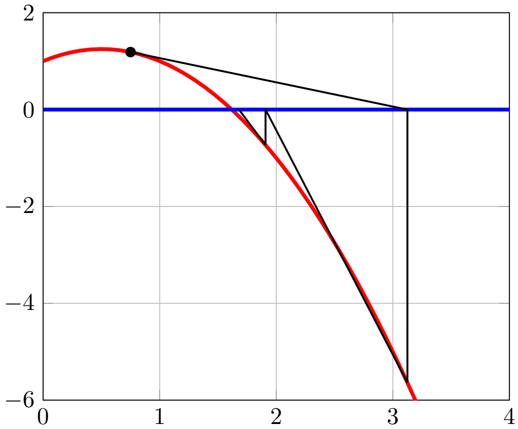
b) $x = 2x$

Här kollar vi för $f(x) = x - 2x = -x = 0$. Likadant här hamnar vi direkt i $x = 0$ och övriga iterationer ger sedan $x = 0$.



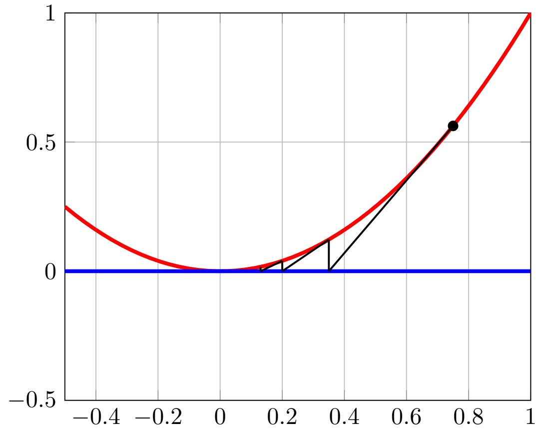
c) $x = x^2 - 1$

Vi kollar för $f(x) = x - x^2 + 1 = 0$.



d) $x = x(1-x)$

Vi kollar $f(x) = x - x(1-x) = x^2 = 0$.



Övning 6.21

Verifiera att uppskattningen i Sats 6.4 är uppfylld efter tre iterationer med bisektionsalgoritmen för ekvationen enligt Övning 6.7.

a) $x^2 = 2$

Enligt Sats 6.4 så konvergerar bisektionsalgoritmen "linjärt" mot en rot $\bar{x} \in (a, b)$ enligt

$$|\bar{x} - \hat{x}_n| \leq 2^{-(n+1)}(b-a), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Från Övning 6.7a har vi att för $n = 3$ fått fram $\hat{x}_3 = 1.375$. Roten till $f(x) = x^2 - 2 = 0$ ges av $\bar{x} = \sqrt{2}$ (även $-\sqrt{2}$ men vi kollar intervalet $[a, b] = [0, 2]$ i övningen). Enligt satsen ska alltså

$$|\sqrt{2} - 1.375| \leq 2^{-(3+1)}(2-0) = 2^{-3} = \frac{1}{8},$$

vilket är samma sak som olikheten $0.039 \leq 0.125$, vilket stämmer.

b) $x^3 = 2$

Från Övning 6.7b har vi fått $\hat{x}_3 = 1.375$. Vi har alltså att

$$|\sqrt[3]{2} - 1.375| \leq 2^{-(3+1)}(2-0) = 0.125,$$

vilket är samma sak som $0.115 \leq 0.125$, vilket stämmer.

c) $x^5 + 7x^2 = 8x + 1$

Från Övning 6.7c har vi fått $\hat{x}_3 = 1.125$. Vi har alltså att

$$|1.080 - 1.125| \leq 2^{-(3+1)}(2-0) = 0.125,$$

vilket är samma sak som $0.045 \leq 0.125$, vilket stämmer.

d) $(x - 0.01)(x + 10) = 0$

Från Övning 6.7d har vi fått $\hat{x}_3 = 0.125$. Vi har alltså att

$$|0.01 - 0.125| \leq 2^{-(3+1)}(2 - 0) = 0.125,$$

vilket är samma sak som $0.115 \leq 0.125$, vilket stämmer.

Övning 6.22

Bestäm ett approximativt värde på Lipschitz-konstanten L_g i Sats 6.5 genom att evaluera g' i startpunkten, sista iterationspunkten och fixpunkten. Verifiera att uppskattningen (6.46) i Sats 6.5 är uppfylld efter tre iterationer med fixpunktsalgoritmen för ekvationen enligt Övning 6.13.

a) $x^2 = 2$

Vi har i Övning 6.13 att $g(x) = x + \alpha f(x)$ med $\alpha = -0.1$. Alltså är $g'(x) = 1 - 0.2x$. Vi får då i varje punkt att

$$g'(1) = 0.8, \quad f'(1.240) \approx 0.752, \quad g'(\sqrt{2}) \approx 0.717.$$

Vi tar största värdet som vår approximativa Lipschitz-konstant, dvs $L_g \approx 0.8$. Enligt Sats 6.5 har vi efter n iterationer att

$$|\bar{x} - x_n| \leq L_g^n |\bar{x} - x_0|.$$

Vi har alltså att

$$|\sqrt{2} - 1.240| = 0.174 \leq 0.8^3 |\sqrt{2} - 1| = 0.212,$$

vilket stämmer.

b) $x^3 = 2$

Från Övning 6.13b är $g'(x) = 1 - 0.3x^2$. Vi får då i varje punkt att

$$g'(1) = 0.7, \quad f'(1.208) \approx 0.562, \quad g'(\sqrt[3]{2}) \approx 0.524.$$

Vi tar största värdet som vår approximativa Lipschitz-konstant, dvs $L_g \approx 0.7$. Vi har alltså att

$$|\sqrt[3]{2} - 1.208| = 0.052 \leq 0.7^3 |\sqrt[3]{2} - 1| = 0.089,$$

vilket stämmer.

c) $x^5 + 7x^2 = 8x + 1$

Från Övning 6.13c är $g'(x) = 1 - 0.5x^4 - 1.4x + 0.8$. Vi får då i varje punkt att

$$g'(1) = -0.1, \quad f'(1.084) \approx -0.408, \quad g'(1.080) \approx -0.392.$$

Vi tar största värdet (till belopp) som vår approximativa Lipschitz-konstant, dvs $L_g \approx 0.408$. Vi har alltså att

$$|1.084 - 1.080| = 0.004 \leq 0.408^3 |1.080 - 1| = 0.0054$$

vilket stämmer.

d) $(x - 0.01)(x + 10) = 0$

Från Övning 6.13d är $g'(x) = 1 - 0.1(x + 10 + x - 0.01) = 1 - 0.1(2x + 9.99)$. Vi får då i varje punkt att

$$g'(1) = -0.199, \quad f'(0.01) \approx -0.001, \quad g'(0.01) \approx -0.001.$$

Vi tar största värdet (till belopp) som vår approximativa Lipschitz-konstant, dvs $L_g \approx 0.199$. Vi har alltså att

$$|0.01 - 0.010000803| = 8.03 \times 10^{-7} \leq 0.199^3|0.01 - 1| = 0.0078$$

vilket stämmer.

Övning 6.23

Bestäm ett approximativt värde på konstanten M i Sats 6.6 genom att evaluera f' i startpunkten, sista iterationspunkten och fixpunkten. Verifiera att uppskattningen (6.50) i Sats 6.6 är uppfylld efter tre iterationer med Newtons metod för ekvationen enligt Övning 6.17.

a) $x^2 = 2$

Enligt Sats 6.6 ges följande uppskattning för Newtons metod efter n iterationer

$$|\bar{x} - \hat{x}_n| \leq M|f(x_n)|, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

där $M = \max_I 1/|f'|$ för givet intervall I. Vi har $f(x) = x^2 - 2$ och därmed $f'(x) = 2x$. Därmed ges att

$$f'(1) = 2, \quad f'(1.4242) = 2.8484, \quad f'(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2},$$

och alltså approximerar vi $M \approx 1/|2| = 0.5$. Vi har därmed att

$$|\sqrt{2} - 1.4142157| = 2.13 \times 10^{-6} \leq 0.5|1.4142157^2 - 2| = 3.02 \times 10^{-6},$$

vilket stämmer.

b) $x^3 = 2$

Vi har $f(x) = x^3 - 2$ och därmed $f'(x) = 3x^2$. Därmed ges att

$$f'(1) = 3, \quad f'(1.2599) = 4.762, \quad f'(\sqrt[3]{2}) = 4.7622,$$

och alltså approximerar vi $M \approx 1/|3| \approx 0.333$. Vi har därmed att

$$|\sqrt[3]{2} - 1.2599335| = 1.25 \times 10^{-5} \leq 0.33333|1.2599335^3 - 2| = 1.98 \times 10^{-5},$$

vilket stämmer.

c) $x^5 + 7x^2 = 8x + 1$

Vi har $f(x) = x^5 + 7x^2 - 8x - 1$ och därmed $f'(x) = 5x^4 + 14x - 8$. Därmed ges att

$$f'(1) = 11, \quad f'(1.0804215) = 13.939, \quad f'(1.08042) = 13.939,$$

och alltså approximerar vi $M \approx 1/|11| \approx 0.0909$. Vi har därmed att

$$\begin{aligned}|1.08042150933891 - 1.080421541909| &= 3.26 \times 10^{-8}\\ &\leq 0.09091|1.080421542^5 + 7 \cdot 1.080421542^2 - 8 \cdot 1.080421542 - 1|\\ &\approx 4.14 \times 10^{-8},\end{aligned}$$

vilket stämmer.

d) $(x - 0.01)(x + 10) = 0$

Vi har $f(x) = (x - 0.01)(x + 10)$ och därmed $f'(x) = 2x + 9.99$. Därmed ges att

$$f'(1) = 11.99, \quad f'(0.0100) = 10.01, \quad f'(0.01) = 10.01,$$

och alltså approximerar vi $M \approx 1/|10.01| \approx 0.0999$. Vi har därmed att

$$\begin{aligned} |0.01 - 0.010000043| &= 4.3 \times 10^{-8} \\ &\leq 0.0999|(0.010000043 - 0.01)(0.010000043 + 10)| \\ &\approx 4.3 \times 10^{-8}, \end{aligned}$$

vilket stämmer.

Övning 6.24

Bestäm antalet iterationer som krävs för att lösa ekvationen med bisektionsalgoritmen enligt Övning 6.7 med en noggrannhet av 1×10^{-15}.

a) $x^2 = 2$
Vi vill alltså att $|\sqrt{2} - \hat{x}_n| \leq 1 \times 10^{-15}$. Från Sats 6.4 har vi att bisektionsalgoritmen konvergerar enligt

$$|\bar{x} - \hat{x}_n| \leq 2^{-(n+1)}(b - a),$$

och i och med att vi har intervallet $[a, b] = [0, 2]$, så får vi att

$$|\sqrt{2} - \hat{x}_n| \leq 2^{-(n+1)} \cdot 2 = 2^{-n}.$$

Då är frågan för vilket n vi har att $2^{-n} \leq 10^{-15}$, vilket löses av

$$2^{-n} \leq 10^{-15} \implies -n \ln(2) \leq -15 \ln(10) \implies n \geq \frac{15 \ln(10)}{\ln(2)} \approx 49.83,$$

och alltså är antalet iterationer som krävs $n = 50$.

b, c, d)
För alla dessa uppgifter gäller att konvergensen ges av $\leq 2^{-n}$ och är alltså oberoende av givna ekvationen. Svaret blir alltså för alla uppgifterna $n = 50$.

Övning 6.25

Bestäm antalet iterationer som krävs för att lösa ekvationen med fixpunktsalgoritmen enligt Övning 6.13 med en noggrannhet av 1×10^{-15}. Se Övning 6.22 för uppskattning av Lipschitz-konstanten.

a) $x^2 = 2$
Konvergensen ges enligt Sats 6.5 av

$$|\bar{x} - x_n| \leq L_g^n |\bar{x} - x_0|.$$

I 6.22a uppskattade vi $L_g \approx 0.8$, och vi ska därmed lösa olikheten

$$0.8^n |\sqrt{2} - 1| \leq 10^{-15} \implies n \ln(0.8) \geq \ln\left(\frac{10^{-15}}{|\sqrt{2} - 1|}\right) \implies n \geq \frac{\ln\left(\frac{10^{-15}}{|\sqrt{2}-1|}\right)}{\ln(0.8)} \approx 150.8,$$

vilket ger att antalet iterationer som krävs är $n = 151$.

b) $x^3 = 2$

I 6.22b uppskattade vi $L_g \approx 0.7$, och vi ska därmed lösa olikheten

$$0.7^n|\sqrt[3]{2} - 1| \leq 10^{-15} \implies n\ln(0.7) \geq \ln\left(\frac{10^{-15}}{|\sqrt[3]{2} - 1|}\right) \implies n \geq \frac{\ln\left(\frac{10^{-15}}{|\sqrt[3]{2}-1|}\right)}{\ln(0.7)} \approx 93.06$$

vilket ger att antalet iterationer som krävs är $n = 94$.

c) $x^5 + 7x^2 = 8x + 1$

I 6.22c uppskattade vi $L_g \approx 0.408$, och vi ska därmed lösa olikheten

$$0.408^n|1.0804 - 1| \leq 10^{-15} \implies n\ln(0.408) \geq \ln\left(\frac{10^{-15}}{|1.0804 - 1|}\right) \implies n \geq \frac{\ln\left(\frac{10^{-15}}{|1.0804-1|}\right)}{\ln(0.408)} \approx 35.715$$

vilket ger att antalet iterationer som krävs är $n = 36$.

d) $(x - 0.01)(x + 10) = 0$

I 6.22d uppskattade vi $L_g \approx 0.199$, och vi ska därmed lösa olikheten

$$0.199^n|0.01 - 1| \leq 10^{-15} \implies n\ln(0.199) \geq \ln\left(\frac{10^{-15}}{|0.01 - 1|}\right) \implies n \geq \frac{\ln\left(\frac{10^{-15}}{|0.01-1|}\right)}{\ln(0.199)} \approx 21.387$$

vilket ger att antalet iterationer som krävs är $n = 22$.