Övning 2.4 (c) Avgör huruvida funktionen $f : X \to Y, \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$ är inverterbar för $X = Y = \mathbb{R}$.

Vi skriver om funktionen som $f(x) = x - \frac{x}{x^2+1}$. Om vi kan visa att f är både injektiv och surjektiv har vi visat att den är inverterbar.

Vi börjar med surjektiviteten. Vi märker kanske först att $f(0) = 0$ och att nämnaren $x^2 + 1$ alltid är större än noll, så det finns inte några odefinierade punkter. Vi har också att $f(\mathit{stora}\ |x|) \approx x$, då $-\frac{x}{x^2+1}$ går mot noll för stora x. Alltså finns det ingen övre eller undre begränsning för f, och det är nu rimligt[1] att f kan anta alla värden mellan minus och plus oändligheten, det vill säga intervallet $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$. Alltså är f surjektiv.

För att visa att f är injektiv utnyttjar vi att f är injektiv om f är strängt växande. Låt $h > 0$ vara förskjutningen mellan ett tal $x \in \mathbb{R}$ och det (strikt) större talet $(x + h) \in \mathbb{R}$.

Om f är strängt växande måste $f(x+h) > f(x) \iff f(x+h) - f(x) > 0$. Vi försöker nu uppskatta skillnaden:

$$\begin{aligned}
f(x+h) - f(x) &= (x+h) - \frac{x+h}{(x+h)^2+1} - (x - \frac{x}{x^2+1}) \\
&= x + h - x - \frac{x+h}{(x+h)^2+1} + \frac{x}{x^2+1} \\
&= h - \frac{x+h}{(x+h)^2+1} + \frac{x}{x^2+1}, \quad \text{då } (x+h)^2+1 > x^2+1 \text{ gäller (se anm.)} \\
&> h - \frac{x+h}{x^2+1} + \frac{x}{x^2+1} \\
&= h - \frac{h}{x^2+1} \\
&\geq h - \frac{h}{1} = 0, \ \text{alltså måste:}
\end{aligned}$$

$f(x+h) - f(x) > 0$, vilket visar att f är strängt växande.

Då f är både injektiv och surjektiv är f bijektiv och därmed inverterbar!

[1] Att detta är sant beror på att f är kontinuerlig.

(anm.): Vi får att $\frac{x+h}{(x+h)^2+1}$ alltså måste vara lite mindre än $\frac{x+h}{x^2+1}$. Det måste också vara så att $\textit{något} - \textit{mindre bråk} > \textit{något} - \textit{större bråk}$. Den strikta olikheten beror på att $h > 0$.