Bestäm en approximativ lösning till ekvationen $x^7 = 0$ genom att utföra 100 iterationer i bisektionsalgoritmen (med finess) på intervallet $[a, b]$.

(a) $[a, b] = [-1, 1]$

Den första mittpunkten blir 0. Då $f(0) = 0$ avbryts algoritmen direkt eftersom vi redan hittat vår lösning. Vi får alltså $\hat{x} = 0$.

(b) $[a, b] = [-10^{-100}, 1]$

Det första vi ser är att den vänstra gränsen är ett väldigt litet tal. Vi inför konstanten $h = 10^{-100}$ för enkelhets skull och skriver upp den ursprungliga intervalllängden

$$L_0 = (1 - (-h))) = 1 + h$$

Efter n steg i bisektionsalgoritmen kommer vi att ha utfört n stycken halveringar, och det kvarvarande intervallet kommer då att ha längden

$$L_n = \frac{L_0}{2^n}$$

Vi kan skriva den första mittpunkten $\hat{x}_0 = (1 - h)/2$ som

$$\hat{x}_0 = -h + \frac{L_0}{2},$$

alltså den vänstra punkten plus halva intervallets längd. Eftersom dessa till en början kommer vara relativt stora tal ($\approx 1/2, 1/4..$) och att vi därmed kommer behålla den vänstra intervallgränsen kan vi för någon övre gräns N skriva mittpunkterna som

$$\hat{x}_n = -h + \frac{L_n}{2} = -h + \frac{L_0}{2^{n+1}} \qquad n \leq N$$

Speciellt slutar ju detta vara sant efter det första n sådant att $\hat{x}_n < 0$, ty då är även $(\hat{x}_n)^7 < 0$. Då uttrycket för $\hat{x}_n$ ovanför är avtagande räcker det att kontrollera att $\hat{x}_{100} > 0$, för då har alla värden innan också varit positiva. Vi får slutligen att

$$-h + \frac{L_0}{2^{100+1}} = -h + (1 + h)2^{-101} = 2^{-101} - h + h2^{-101} \approx 2^{-101} > 0$$

Där approximationen följer från att $10^{-100} << 2^{-101}$.

Svaret blir alltså $\hat{x}_{100} \approx 2^{-101}$

(c) $[a, b] = [-1, 10^{-100}]$

Vi resonerar här på precis samma sätt som i (b), men behåller nu alltid den högra intervallgränsen. Det enda som skiljer här blir tecknet och vi får $\hat{x}_{100} = -2^{-101}$.

(d) $[a, b] = [-2^{-100}, 1]$

Vi skriver upp våra mittpunkter på samma sätt som innan, men försöker nu avgöra för vilket n vi får ett negativt värde på $\hat{x}_n$.

$$\hat{x}_n = -2^{-100} + \frac{1 + 2^{-100}}{2^{n+1}} = -2^{-100} + 2^{-(n+1)} + 2^{-100-(n+1)}$$

Vi ser att för $n = 99$ tar de första två termerna ut varandra och det som står kvar är ett litet, men positivt tal. För $n < 99$ får vi heller inga problem, då är $2^{-(n+1)} > 2^{-100}$. Alltså kommer uttrycket även gälla för $n = 100$ eftersom vi i den sista halveringen kommer behålla den vänstra intervallgränsen. Vi beräknar nu

$$\hat{x}_{100} = -2^{-100} + 2^{-101} + 2^{-100-101} \approx -2^{-100} + 2^{-100}/2 = -2^{-100}/2 = -2^{-101}$$