Chalmers, Teknisk fysik & Teknisk matematik
Skrivning i matematik - introduktionskursen
27 augusti 2011, 14:00–17:00

Skrivtid: 180 min
Inga hjälpmedel tillåtna.
OBS! Lämna *inte* in kladdpapper och lösningsskisser till uppgifterna 1–30.

Namn och program: ....

Personnummer: ....

A. Markera rätt svar genom att ringa in. (1p för varje rätt svar; OBS! Endast ett rätt svar per uppgift.)

1. Om $a = \sqrt{5},\ b = 3\sqrt{5}$ och $c = \dfrac{a+b}{a-b}$, så

   (a) $c = \sqrt{5}$; (b) $c = 2$; (c) $c = 4$; (d) annat svar.

2. Om $a + b > a - 2b$, så följer att

   (a) $a > b$; (b) $b > 0$; (c) $a < b$; (d) inget av (a)-(c).

3. Antalet lösningar till ekvationen $\sin 2x = \sin \dfrac{x}{2}$ sådana att $0 \le x \le \dfrac{3\pi}{2}$ är

   (a) 0; (b) 2; (c) 4; (d) annat svar.

4. Funktionen $f(x) = \sin 2x - \sin \dfrac{x}{2}$ är periodisk med perioden

   (a) 2π; (b) π; (c) 4π; (d) annat svar.

5. Om $f(x) = \sqrt{x}$ och $g(x) = \sin x$, så är $f\left(g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$

   (a) $\sqrt{2}$; (b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; (c) $\dfrac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}$; (d) annat svar.

6. Om $\dfrac{x^5}{8} = 4$, så gäller

   (a) $x = \pm 2$; (b) $x = 2$; (c) $x = -2$; (d) annat svar.

7. Om $a \boxplus b = 3 + ab$ för alla reella tal a och b, så är $2 \boxplus (1 \boxplus 3)$

   (a) 25; (b) 20; (c) 15; (d) annat svar.

8. Det största talet x sådant att $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$ är

   (a) 1; (b) 2; (c) 4; (d) annat svar.

9. Om $\cos\alpha = -\dfrac{1}{3}$ och $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, så har $\sin 2\alpha$ värdet

   (a) $-\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$; (b) $\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$; (c) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$; (d) annat värde.

10. Om $\sin\alpha = t$ och $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, så har $\cot\alpha$ värdet

    (a) $\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{t^2}$; (b) $\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{t}$; (c) $\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{-t}$; (d) annat värde.

11. Om $\ln 16 = a$, så är $\ln 4$

    (a) $2a$; (b) $\sqrt{a}$; (c) a^2; (d) annat svar.

12. Om $S_{1000} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2^{1000}}$, så gäller att $S_{1000} =$

    (a) $\dfrac{2^{1000}-1}{2}$; (b) $2(2^{1001}-1)$; (c) $\dfrac{2^{1001}-1}{2^{1000}}$; (d) annat svar.

13. För alla reella x gäller

    (a) $\cos^2 x - \sin^2 x = 1$;
    (b) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;
    (c) $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$;
    (d) inget av ovanstående.

14. Talet 4 är lösning till olikheten

    (a) $x \le 1$; (b) $1 - x \le -4$; (c) $x \le 4$; (d) ingen av (a)-(c).

15. Olikheten $-x^2 + x - 1 \geq 0$ gäller för

(a) alla reella x;
(b) inget reellt x;
(c) alla $x \geq 2006$;
(d) inget av (a)-(c).

16. Om $x > 0$ och $y > 0$ så gäller att

(a) $\ln xy = \ln x \cdot \ln y$;
(b) $\ln (x + y) = \ln x + \ln y$;
(c) $\ln xy = \ln x + \ln y$;
(d) inget av ovanstående.

17. För alla $x < 0$ gäller att

(a) $|x + 5| = -x + 5$;
(b) $|x + 5| > 0$;
(c) $|x| < 0$;
(d) inget av ovanstående.

18. Funktionen $f(x) = 15 - x^3 - 3x^2$ är växande för

(a) $-1 \leq x \leq 1$;
(b) $-2 \leq x \leq 0$;
(c) $2 \leq x \leq 3$;
(d) alla reella x.

19. Om a, b, c är sidlängderna i triangeln ABC och R är den omskrivna cirkelns radie så är triangelns area lika med

(a) $\dfrac{abc}{2R^2}$; (b) $\dfrac{a^3}{4R}$; (c) $\dfrac{(a+b+c)^3}{R}$; (d) $\dfrac{abc}{4R}$.

20. För alla reella x, y gäller att $\sin x + \sin y =$

(a) $2 \sin \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$; (b) $2 \sin \dfrac{x-y}{2} \cos \dfrac{x+y}{2}$;
(c) $2 \sin \dfrac{x+y}{2} \sin \dfrac{x-y}{2}$; (d) $2 \cos \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$.

B. Lös uppgifterna nedan; ange endast svar. (2p för varje rätt svar)

21. Beräkna

$$\frac{\frac{1}{3}-\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}.$$

Svar:

22. Ange den största lösningen till ekvationen $x^2 - 5x - 2 = 0$.

Svar:

23. Givet funktionen $f(x) = x \sin 2x$, ange $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Svar:

24. Beräkna $\displaystyle\int_1^3 (x^2 - 3x + e^{2x})\, dx$.

Svar:

25. Ange det största parametervärde a, för vilket ekvationen $ax^2 - x + 1 = 0$ har minst en reell lösning.

Svar:

26. Givet funktionen $f(x) = \sin^2 x + \cos x + 2$, ange summan av f:s största och minsta värde.

Svar:

27. Triangeln ABC är likbent med sidlängder $|AB| = 6$, $|BC| = |AC| = 5$. Bestäm höjden mot sidan BC.

Svar:

28. En triangel ABC har sidlängderna $|AB| = 15$, $|BC| = 14$, $|CA| = 13$. Bestäm $\sin\gamma$, där γ är vinkeln som står mot sidan AB.

Svar:

29. Ange antalet lösningar till ekvationen $\cos x = \dfrac{|x|}{x}$ i intervallet $[-10, 10]$.

Svar:

30. Ange antalet reella lösningar till ekvationen $|x(3 - |x|)| = 4$.

Svar:

C. Ge fullständig lösning till uppgiften nedan. (max 5p)

Lös ekvationen

$$\sqrt{4x+1} = 4 - \sqrt{2x-3}\,.$$

Chalmers, Teknisk fysik & Teknisk matematik
Skrivning i matematik - introduktionskursen
27 augusti 2011

A.

1d
2b
3c
4c
5b
6b
7c
8d
9a
10c
11d
12c
13b
14c
15b
16c
17d
18b
19d
20a

B.

21: $-\frac{4}{75}$

22: $\frac{5+\sqrt{33}}{2}$

23: $-\pi$

24: $-\frac{10}{3}+\frac{1}{2}e^6-\frac{1}{2}e^2$

25: $\frac{1}{4}$

26: $\frac{17}{4}$

27: $\frac{24}{5}$

28: $\frac{12}{13}$

29: 3

30: 2

C. *Lösning:* Rotuttrycken i v.l. och h.l. är definierade för $x \geq \frac{3}{2}$. Kvadrering ger en ekvation ekvivalent med den givna förutsatt att v.l. och h.l. har samma tecken. Vi flyttar därför över rotuttrycket från h.l. till v.l.

$$\sqrt{4x+1} + \sqrt{2x-3} = 4.$$

Kvadrering och en viss förenkling ger nu (för $x \geq \frac{3}{2}$) den ekvivalenta ekvationen

$$\sqrt{(4x+1)(2x-3)} = 9 - 3x.$$

Eftersom v.l. i ekvationen ovan är icke-negativt, måste h.l. också vara det, vilket ger villkoret $x \leq 3$. Under den förutsättningen kan vi kvadrera en gång till och då få en ekvation ekvivalent med den ursprungliga (för $\frac{3}{2} \leq x \leq 3$)

$$x^2 - 44x + 84 = 0.$$

Av de två rötterna $x_1 = 2$ och $x_2 = 42$ är det endast $x_1 = 2$ som uppfyller villkoren vi behövde ställa på vägen ($42 \not\leq 3$). Den ursprungliga ekvationen har alltså en enda lösning $x = 2$.