

Chalmers, Teknisk fysik & Teknisk matematik
Skrivning i matematik - introduktionskursen
1 september 2012, 14:00–17:00

Skrivtid: 180 min

Inga hjälpmedel tillåtna.

OBS! Lämna *inte* in kladdpapper och lösningsskisser till uppgifterna 1–30.

Namn och program:

Personnummer:

A. Markera rätt svar genom att ringa in. (1p för varje rätt svar; OBS! Endast ett rätt svar per uppgift.)

1. Uttrycket $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3 + \sqrt{11}} \cdot \sqrt{\sqrt{11} - 3}}$ är lika med

(a) 1; (b) 2; (c) $\sqrt{11}$; (d) annat svar.

2. Om $\frac{x}{y} = 3$, så är uttrycket $\frac{(x - y)(x^2 + y^2)}{x^3 + y^3}$ lika med

(a) $\frac{20}{27}$; (b) $\frac{10}{7}$; (c) $\frac{1}{12}$; (d) annat svar.

3. Om $a = \log_{11} 121 + \log_{\sqrt{2}} 64 - 7^{\log_7 2}$, så gäller att

(a) $a = 2$; (b) $a = 12$; (c) $a = 7$; (d) inget av (a)-(c).

4. Ekvationen $2^{x-1} \cdot 5^{x-1} = 0,1 \cdot 10^{2x+5}$ har lösningen

(a) -3 ; (b) -4 ; (c) -5 ; (d) inget av (a)-(c).

5. Funktionen $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - 4x + 1 = 0$ har lokalt maximum för

(a) -1 ; (b) 4; (c) -1 och 4; (d) inget av (a)-(c).

6. Om $x \boxplus y = x + y - xy$, för alla reella tal x, y , så gäller *inte* att

- (a) $x \boxplus y = y \boxplus x$;
- (b) $x \boxplus 0 = x$;
- (c) $x \boxplus 1 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$;
- (d) $x \boxplus x \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

7. Summan $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ är geometrisk. Om $a_1 + a_3 + a_5 = 455$, och $a_2 + a_4 + a_6 = 1365$, så är kvoten q lika med

- (a) 2; (b) 3; (c) 4; (d) annat svar.

8. Uttrycket $\frac{\cos^2 10^\circ - \sin^2 10^\circ}{\cos 20^\circ}$ är lika med

- (a) $\frac{1}{\cos 20^\circ}$; (b) $\frac{1}{2}$; (c) 0; (d) annat svar.

9. Om $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ och $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, så har $\sin 2\alpha$ värdet

- (a) $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$; (b) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$; (c) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$; (d) annat värde.

10. Om $\sin \alpha = t$ och $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, så har $\tan \alpha$ värdet

- (a) $\frac{\sqrt{1-t^2}}{t^2}$; (b) $\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}$; (c) $\frac{\sqrt{1-t^2}}{-t}$; (d) annat värde.

11. Om $e^a = 32$, så är $\ln 4$ lika med

- (a) $\frac{2a}{5}$; (b) $\frac{a}{5}$; (c) $\frac{a^2}{5}$; (d) annat svar.

12. Om $S_{1000} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{1000}}$, så gäller att $S_{1000} =$

- (a) $\frac{2^{1000} - 1}{2}$; (b) $2(2^{1001} - 1)$; (c) $\frac{2^{1001} - 1}{2^{1000}}$; (d) annat svar.

13. En romb med sidlängd 4 l.e. och spetsig vinkel 45° har arean (i a.e.)

- (a) $4\sqrt{2}$; (b) 16; (c) $8\sqrt{2}$; (d) inget av ovanstående.

14. En romb med diagonallängder 4 l.e. och 3 l.e. har arean (i a.e.)

- (a) 6; (b) 12; (c) annat tal; (d) går ej att avgöra.

15. Den största heltalslösningen till olikheten $\frac{6-x-x^2}{x^2+1} > 0$ är

- (a) 1; (b) 2; (c) 3; (d) inget av (a)-(c).

16. Den största heltalslösningen till olikheten $\frac{6-x-x^2}{x^2+1} \geq 0$ är

- (a) 1; (b) 2; (c) 3; (d) inget av (a)-(c).

17. För alla $x < -5$ gäller att

- (a) $|x+5| = -x+5$;
(b) $|x+5| > |x|$;
(c) $|x| > |x+1|$;
(d) inget av ovanstående.

18. För alla $x > 5$ gäller att

- (a) $|x+5| = x-5$;
(b) $|x+5| > |x|$;
(c) $|x| > |x+1|$;
(d) inget av ovanstående.

19. Om a, b, c är sidlängderna i triangeln ABC och r är den inskrivna cirkelns radie så är triangelns area lika med

- (a) $\frac{(a+b+c)r}{3}$; (b) $\frac{a+b+c}{2r}$; (c) $\frac{(a+b+c)r}{2}$; (d) $\frac{(a+2b+c)r}{2}$.

20. Om a, b, c är sidlängderna i triangeln ABC , och $p = \frac{a+b+c}{2}$, så är triangelns area lika med

- (a) $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;
(b) $\sqrt{p(p+a)(p+b)(p+c)}$;
(c) $\sqrt{p-2a)(p-2b)(p-2c)}$;
(d) $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}$.

B. Lös uppgifterna nedan; ange endast svar. (2p för varje rätt svar)

21. Beräkna

$$\frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{7}}{\frac{1}{4} - \frac{5}{12}}.$$

Ange svaret på formen $\frac{p}{q}$, där p, q är relativt prima heltal.

Svar:

22. Ange den största lösningen till ekvationen $3x^2 + 7x - 2 = 0$.

Svar:

23. Givet funktionen $f(x) = \frac{x^2 - x + 3}{2x^2 + x + 7}$, ange $f' \left(-\frac{1}{2} \right)$.

Svar:

24. Beräkna $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (x^3 - \sin 2x + \cos x) dx$.

Svar:

25. Om funktionen f är sådan att $f(x + 3) = 7x - 1$, ange $f(10)$.

Svar:

26. Ange den minsta lösningen till olikheten $x(x + 1) \leq 0$.

Svar:

27. Ange den minsta lösningen till ekvationen $\sqrt{2 - x} = 10 + x$.

Svar:

28. Lös ekvationen $2 \sin^2 x + 7 \cos x - 5 = 0$. Ange antalet lösningar i $[0, 2\pi]$.

Svar:

29. Ange det största heltalet som är lösning till olikheten $\frac{|x + 3|}{x^2 + 1} \geq 1$.

Svar:

30. Sträckan CD är höjd mot hypotenusan i den rätvinkliga triangeln ABC .
Ange längden av kateten AC om $|AD| = 4$ cm och $|DB| = 5$ cm.

Svar:

C. Ge fullständig lösning till uppgiften nedan. (max 5p)

Lös olikheten

$$|x^2 - 5x + 2| \leq 4.$$

Chalmers, Teknisk fysik & Teknisk matematik

Facit till skrivning i matematik - introduktionskursen

1 september 2012

A

1b, 2d, 3b, 4c, 5a, 6d, 7b, 8d, 9b, 10d, 11a, 12c, 13c, 14a, 15a, 16b, 17c, 18b, 19c, 20a;

B

21. $-\frac{46}{7}$;

22. $\frac{-7 + \sqrt{73}}{6}$;

23. $-\frac{41^6}{196}$;

24. $\frac{\pi}{1024} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$;

25. 48;

26. -1;

27. -7;

28. 2;

29. 2;

30. 6 cm.

C

Lösning: Polynomet $p(x) = x^2 - 5x + 2$ har nollställena $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$. Vi har $p(x) < 0$ för $\frac{5 - \sqrt{17}}{2} < x < \frac{5 + \sqrt{17}}{2}$, och $p(x) \geq 0$ för $x \leq \frac{5 - \sqrt{17}}{2}$ och för $x \geq \frac{5 + \sqrt{17}}{2}$.

$$\text{Fall 1: } x^2 - 5x + 2 \geq 0, \text{ d.v.s. } x \in \left(-\infty, \frac{5 - \sqrt{17}}{2}\right] \cup \left[\frac{5 + \sqrt{17}}{2}, \infty\right)$$

Olikheten blir då $x^2 - 5x - 2 \leq 0$. Denna uppfylls för $x \in \left[\frac{5 - \sqrt{33}}{2}, \frac{5 + \sqrt{33}}{2}\right]$.

Eftersom x dessutom måste vara sådant att $x^2 - 5x + 2 \geq 0$, får vi att olikheten $|x^2 - 5x + 2| \leq 4$ uppfylls för $x \in \left[\frac{5 - \sqrt{33}}{2}, \frac{5 - \sqrt{17}}{2}\right]$ och för $x \in \left[\frac{5 + \sqrt{17}}{2}, \frac{5 + \sqrt{33}}{2}\right]$.

$$\text{Fall 2: } x^2 - 5x + 2 < 0, \text{ d.v.s. } x \in \left(\frac{5 - \sqrt{17}}{2}, \frac{5 + \sqrt{17}}{2}\right)$$

Olikheten som ska gälla blir nu $x^2 - 5x + 6 \geq 0$. Den uppfylls för $x \leq 2$ samt för $x \geq 3$. Som ovan får vi nu lösningsintervallen $\left(\frac{5 - \sqrt{17}}{2}, 2\right]$ och $\left[3, \frac{5 + \sqrt{17}}{2}\right)$.

Lösningen till den givna olikheten ges alltså av mängden

$$\left[\frac{5 - \sqrt{33}}{2}, 2\right] \cup \left[3, \frac{5 + \sqrt{33}}{2}\right]$$