CHALMERS

Maskinteknik & Teknisk fysik & Teknisk matematik
Dugga 1
13 september 2014, 10:30–12:30

Skrivtid: 120 min
Inga hjälpmedel tillåtna.
OBS! Lämna *inte* in kladdpapper och lösningsskisser till uppgifterna 1–20.

Eventuella frågor kan ställas per telefon.
Anders Logg: 031-7725346 (främst M)
Jana Madjarova: 073-7855697 (främst F och TM)

Namn och program: ....

Personnummer: ....

A. Markera rätt svar genom att ringa in. (1p för varje rätt svar; OBS! Endast ett rätt svar per uppgift.)

1. Uttrycket $\dfrac{a^6-8}{a^4+4a^2+4}$ är för alla reella a lika med är lika med

   (a) a^2-2; (b) a^2+2; (c) $(a-2)^2$; (d) inget av (a)-(c).

2. Talet $\sqrt{6-\sqrt{20}}$ är lika med

   (a) $\sqrt{5}-1$; (b) $1-\sqrt{5}$; (c) $\sqrt{6}-\sqrt[4]{20}$; (d) annat svar.

3. Antalet (reella) lösningar till ekvationen $\sqrt{x+3}=-x-3$ är

   (a) 0; (b) 1; (c) 2; (d) inget av (a)-(c).

4. Den största lösningen till ekvationen $4^x-10\cdot 2^x+16=0$ är

   (a) -1; (b) 1; (c) 3; (d) inget av (a)-(c).

5. Det största heltalet som uppfyller $\log_3(\log_5 x)) \leq 0$ är

   (a) 1; (b) 3; (c) 5; (d) annat svar.

6. Om $\sin\alpha = -\dfrac{1}{3}$ och $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$, så har $\sin 2\alpha$ värdet

(a) $-\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$; (b) $\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$; (c) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$; (d) annat värde.

7. Om $\cos\alpha = t$ och $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, så har $\tan\alpha$ värdet

(a) $\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{t^2}$; (b) $\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{t}$; (c) $\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{-t}$; (d) annat värde.

8. Markera det tal som *inte* kan vara antalet kanter i en pyramid

(a) 28; (b) 29; (c) 30; (d) inget av (a)-(c).

9. Ekvationen $x^2 + 24xy + 68y^2 = 0$ representerar en

(a) ellips; (b) parabel; (c) hyperbel; (d) går inte att avgöra.

10. För det komplexa talet z gäller att $z + \bar{z} > 0,\ iz + \overline{iz} < 0$. Talet z ligger i

(a) första kvadranten; (b) andra kvadranten;
(c) annan kvadrant; (d) går ej att avgöra.

11. Talet $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ är lika med

(a) $e^{i\frac{2\pi}{3}}$; (b) $-2e^{-i\frac{\pi}{3}}$; (c) $\overline{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}$; (d) inget av (a)-(c).

12. Antalet heltalslösningar till olikheten $(x+1)(x-2)(x-6)(x-7) < 0$ är

(a) 2; (b) 4; (c) 6; (d) inget av (a)-(c).

13. Ellipsen $x^2 + 2y^2 = 2$ beskrivs av $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ t \in [0, 2\pi]$ för

(a) $a = 2,\ b = 1$; (b) $a = 1,\ b = 2$; (c) $a = 1,\ b = \sqrt{2}$; (d) inget av (a)-(c).

14. Markera den olikhet som *inte* är ekvivalent med olikheten $\dfrac{3-x}{x+2} > 0$

(a) $\dfrac{x-3}{x+2} < 0$;
(b) $(3-x)(x+2) > 0$;
(c) $\dfrac{2+x}{3-x} > 0$;
(d) alla olikheter i (a)-(c) är ekvivalenta med den givna.

15. Likheten $|x+3|+|x-3|=6$ gäller för alla x som uppfyller

(a) $0 < x < 3$;
(b) $x < -3$;
(c) $x > 3$;
(d) inget av ovanstående.

B. Lös uppgifterna nedan; ange endast svar. (2p för varje rätt svar)

16. Beräkna

$$\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{5}}{\frac{2}{15}-\frac{7}{12}}.$$

Ange svaret på formen $\frac{p}{q}$, där p, q är relativt prima heltal.

Svar:

17. Beräkna och ange $\log_{5\sqrt{5}} 5$.

Svar:

18. Givet att $S = 2 + a_2 + a_3 + 54$ är en geometrisk summa, beräkna och ange S.

Svar:

19. Givet funktionen $f(x) = \cos^2 x + \sin x - 3$, ange dess minsta värde.

Svar:

20. Ange den största heltalslösningen till ekvationen

$$2^{\pi - x} \cos(\pi x) = (-1)^{x+10} \cdot 4^{x+\frac{\pi}{2}-3}.$$

Svar:

C. Ge fullständig lösning till uppgiften nedan. (max 5p)

Lös ekvationen

$$\sin(\ln x) = \cos(\ln(x^2)).$$

Dugga 1, 13 september 2014 - SVAR

A.

1d
2a
3b
4c
5c
6b
7c
8b
9c
10a
11c
12a
13d
14d
15a

B.

16: $-\frac{16}{21}$
17: $\frac{2}{3}$
18: 80
19: -4
20: 2

C. *Lösning 1:* För att $\ln x$ ska vara definierad krävs att $x > 0$. För positiva x gäller $\ln(x^2) = 2\ln x$. Genom att använda en av formlerna för cosinus av dubbla vinkeln får vi

$$\sin(\ln x) = 1 - 2\sin^2(\ln x).$$

Sätt $t = \sin(\ln x)$. Vi behöver lösa andragradsekvationen för t

$$2t^2 + t - 1 = 0.$$

Dess lösningar är $t_1 = \dfrac{1}{2}$ och $t_2 = -1$.

(1) $\sin(\ln x) = \dfrac{1}{2}$: Lösningarna är

$$\ln x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad \text{d.v.s.} \quad x = e^{\frac{\pi}{6}+2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

och

$$\ln x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad \text{d.v.s.} \quad x = e^{\frac{5\pi}{6}+2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(2) $\sin(\ln x) = -1$: Lösningarna är

$$\ln x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \text{d.v.s.} \quad x = e^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Man kan förenkla något och skriva alla lösningar som

$$\ln x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, \quad \text{d.v.s.} \quad x = e^{\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

och

$$\ln x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \text{d.v.s.} \quad x = e^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Lösning 2: För att $\ln x$ ska vara definierad krävs att $x > 0$. För positiva x gäller $\ln(x^2) = 2\ln x$. Ekvationen kan skrivas om som

$$\sin(\ln x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\ln x\right).$$

Lösningarna är då alla x sådana att

$$\ln x = \frac{\pi}{2} - 2\ln x + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

eller

$$\ln x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 2\ln x\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

vilket ger samma lösningsskara.