

CHALMERS

Maskinteknik & Teknisk fysik & Teknisk matematik

Dugga 1

10 september 2016,

Maskinteknik 12:00–14:00,
Teknisk fysik & Teknisk matematik 13:00–15:00

OBS! Studenterna som läser Maskinteknik får inte lämna salen före 13:30.

Skrivtid: 120 min

Inga hjälpmedel tillåtna.

OBS! Lämna *inte* in kladdpapper och lösningsskisser till uppgifterna 1–20.

Eventuella frågor kan ställas per telefon.

Anders Logg: 031-7725346 (främst M, 12:00–14:00)

Jana Madjarova: 073-7855697 (främst F och TM, 13:00–15:00)

Namn och program:

Personnummer:

A. Markera rätt svar genom att ringa in. (1p för varje rätt svar; OBS! Endast ett rätt svar per uppgift.)

1. Talet $\frac{1}{3}\sqrt{12 + \frac{1}{4}} - \left(\frac{9 \cdot 5^{-2}}{0,5 \cdot 2^{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}}$ är lika med

(a) $\frac{1}{6}$; (b) $\frac{1}{3}$; (c) $\frac{1}{5}$; (d) inget av (a)-(c).

2. Talet $\sqrt[4]{9 - 4\sqrt{5}} \cdot \sqrt{\sqrt{5} + 2}$ är lika med

(a) $3 - 2\sqrt{5}$; (b) $2 + \sqrt{5}$; (c) 1; (d) inget av (a)-(c).

3. Om $a = 3b + 1$, och $ab = 30$, så är $a^2 + 9b^2$ lika med

(a) 109; (b) 161; (c) annat tal; (d) kan ej avgöras.

4. Den minsta lösningen till ekvationen $\sqrt{(2x+3)^2} = x$ är
 (a) -3 ; (b) -1 ; (c) annat tal; (d) ekvationen har ingen reell lösning.
5. Lösningen till ekvationen $\ln(x+8) = \ln 3 + \ln 5$ ligger i intervallet
 (a) $(-1, 1)$; (b) $(2, 3)$; (c) $(5, 8)$; (d) inget av (a)-(c).
6. Om $a = \log_3 2$, så är $\log_9 8 + 3^a - \log_3 6$ lika med
 (a) 1 ; (b) $\frac{a+2}{2}$; (c) $a+2$; (d) inget av (a)-(c).
7. Om $\sin \alpha = t$, och $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, så har $\tan \alpha$ värdet
 (a) $\frac{\sqrt{t^2}}{\sqrt{1-t^2}}$; (b) $-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$; (c) $-\frac{|t|}{\sqrt{1-t^2}}$; (d) annat värde.
8. Om α är en spetsig vinkel sådan att $4\sin^2 \alpha - 5\sin \alpha + 1 = 0$, så tillhör α intervallet
 (a) $(0, \frac{\pi}{12})$; (b) $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$; (c) $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$; (d) inget av (a)-(c).
9. Ekvationen $ax^2 + bx + c = 0$, där b är reellt, har en reell och en icke-reell lösning. Då gäller att
 (a) $b \neq 0$; (b) $c = 0$; (c) $c \neq 0$; (d) inget av (a)-(c) behöver gälla.
10. En liksidig triangel i det komplexa talplanet har två av sina hörn i 1 och 3. Triangelns tredje hörn kan då vara i
 (a) $2+i$; (b) $2+i\sqrt{2}$; (c) $2+\sqrt{3}$; (d) inget av (a)-(c).
11. Talet $(1-i)(1+i\sqrt{3})$ är lika med
 (a) $2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$; (b) $2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$; (c) $2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$; (d) inget av (a)-(c).
12. Funktionen $f(x) = \log_x(x^2 + x + 1)$ är definierad för
 (a) alla reella x ; (b) alla $x > 0$; (c) alla $x \geq 0$; (d) inget av (a)-(c).
13. Givet är fyra tal med egenskapen att hur man än väljer tre av dem har dessa tre tal (aritmetiskt) medelvärde 2016. Alla fyra talens medelvärde är
 (a) 2672; (b) 2016; (c) annat tal; (d) kan ej avgöras.

14. Antalet heltal n sådana att $\left(\frac{n+7}{2n+7}\right)^{-1} < 1$, är

(a) 7; (b) 8; (c) oändligt; (d) inget av (a)-(c).

15. Funktionen $f(x) = 3 \cos 2x + 4 \sin 2x$, definierad för alla reella x , har största värde

(a) 7; (b) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$; (c) 5; (d) annat svar.

B. Lös uppgifterna nedan; ange endast svar. (2p för varje rätt svar)

16. Beräkna

$$\frac{\frac{1}{5} - \frac{3}{8}}{\frac{2}{7} + \frac{3}{14}}.$$

Ange svaret på formen $\frac{p}{q}$, där p, q är relativt prima heltal.

Svar:

17. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ xy = 1. \end{cases}$$

Ange antalet lösningar.

Svar:

18. Konstruera och ange en funktion, definierad för alla reella tal, som har största värde 3 och minsta värde -1 .

Svar:

19. En klass består av 14 barn, vars medelålder är 12 år. När läraren kommer in höjs medelåldern i rummet med tre år (ingen annan än de 14 eleverna och läraren finns i rummet). Beräkna och ange lärarens ålder.

Svar:

20. Lös ekvationen $x = \sqrt{16 - 6x - x^2} - 2$. Ange summan av alla lösningar.

Svar:

C. Ge fullständig lösning till uppgiften nedan. (max 5p)

Lös olikheten

$$2 \tan 2x \leq 3 \tan x.$$

DUGGA 1, 10 SEPTEMBER 2016 - SVAR

A.

1b

2c

3c

4d

5c

6b

7c

8a

9a

10d

11b

12d

13b

14d

15c

B.

16: $-\frac{7}{20}$

17: 2

18: till exempel $f(x) = 2 \sin x + 1$

19: 57

20: 1

C. *Lösning:* För att $\tan x$ och $\tan 2x$ ska vara definierade krävs att $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$, k godtyckligt heltal. Vi härleder först formeln för tangens av dubbla vinkeln

$$\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} =$$

$$[\text{dividera täljare och nämnare med } \cos^2 x \neq 0] = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}.$$

Sätt nu $\tan x = t$, $t \neq \pm 1$. Olikheten som ska bevisas kan nu skrivas som

$$3t - \frac{4t}{1 - t^2} \geq 0.$$

Efter enkla omskrivningar får vi den ekvivalenta olikheten

$$\frac{t(3t^2 + 1)}{t^2 - 1} = \frac{t(3t^2 + 1)}{(t + 1)(t - 1)} \geq 0.$$

Faktorn $3t^2 + 1$ är alltid positiv. Därmed behöver vi bara titta på vad resten av faktorerna har för tecken. Vi undersöker tecknen i intervallen $(-\infty, -1)$, $(-1, 0]$, $[0, 1)$, $(1, \infty)$. I det första av dessa intervall har vi: $t < 0$, $t - 1 < 0$, $t + 1 < 0$, alltså är uttrycket negativt och detta intervall hör inte till lösningsmängden. I nästa intervall är tecknen (i samma ordning) $-$, $-$, $+$, uttrycket är positivt (0 i 0), alltså hör detta intervall till lösningsmängden. En undersökning av tecknen i återstående två intervall (gör den!) ger att lösningsmängden (för t) ges av $(-1, 0] \cup (1, \infty)$. Nu är det dags att påminna om att $\tan x = t$. Låt oss först titta $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Funktionsvärdet för tangens kommer att ligga i de intervall som utgör lösningsmängden för t exakt när $x \in (-\frac{\pi}{4}, 0] \cup (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$. Eftersom funktionen tangens är π -periodisk får vi slutligen att den givna olikheten uppfylls om och endast om

$$x \in \left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, k\pi\right] \cup \left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$