CHALMERS

Maskinteknik & Teknisk fysik & Teknisk matematik

Dugga 1

15 september 2018,

Maskinteknik 12:00–14:00,
Teknisk fysik & Teknisk matematik 13:00–15:00

OBS! Studenterna som läser Maskinteknik får inte lämna salen före 13:30.

Skrivtid: 120 min
Inga hjälpmedel tillåtna.
OBS! Lämna *inte* in kladdpapper och lösningsskisser till uppgifterna 1–20.

Eventuella frågor kan ställas per telefon.
Anders Logg: 031-7725346 (främst M, 12:00–14:00)
Jana Madjarova: 031-7723531 (främst F och TM, 13:00–15:00)

Namn och program: ....

Personnummer: ....

A. Markera rätt svar genom att ringa in. (1p för varje rätt svar; OBS! Endast ett rätt svar per uppgift.)

1. Uttrycket $\sqrt{a+\dfrac{a^2}{b}}-\sqrt{\dfrac{b^2}{a^3}-b}$, är för $a=\dfrac{1}{2},\ b=\dfrac{1}{3}$, lika med

   (a) $\dfrac{\sqrt{5}}{6}$; (b) $\dfrac{5}{6}$; (c) $\dfrac{5\sqrt{3}-\sqrt{2}}{6}$; (d) inget av (a)-(c).

2. Talet $\left(\log_2\sqrt{2}\right)^2$ är lika med

   (a) 1; (b) $\dfrac{1}{4}$; (c) $\dfrac{1}{2}$; (d) inget av (a)-(c).

3. För $a<b<0$ är följande påstående *falskt*

   (a) $a^2>b^2$; (b) $\sqrt{-a}>\sqrt{-b}$; (c) $a^3<b^3$; (d) inget av (a)-(c).

4. Det minsta av talen 1, $2^{\frac{2}{3}}$, $3^{\frac{\ln(\ln 2)}{\ln 3}}$, är

(a) 1; (b) $2^{\frac{2}{3}}$; (c) $3^{\frac{\ln(\ln 2)}{\ln 3}}$; (d) talen kan ej jämföras..

5. Funktionen $f(x) = \dfrac{x+7}{3-6x}\sqrt{2x-1} = 0$, där x är reellt och f antar reella värden, har nollställena

(a) $\dfrac{1}{2}$ och -7; (b) $\dfrac{1}{2}$; (c) -7; (d) funktionen har inga reella nollställen.

6. Alla lösningar till olikheten $\dfrac{1}{1-x} < 1 + x$, ges av

(a) alla x i intervallet $(1, \infty)$; (b) alla x i intervallet $(-\infty, -1)$;
(c) $x = 0$; (d) inget av (a)-(c).

7. Alla lösningar till olikheten $(x+3)\sqrt{x^2-25} < 0$, ges av

(a) alla x i intervallet $(-\infty, -3)$; (b) alla x i intervallet $(-\infty, -5)$;
(c) alla x i intervallet $(-5, -3)$; (d) inget av (a)-(c).

8. Ekvationen $ax^2 + bx - 5 = 0$, där a, b är reella tal, har två olika reella lösningar för

(a) alla $a > 0$; (b) alla $a < 0$; (c) alla reella a; (d) inget av (a)-(c).

9. Om $\sin\alpha = t$, och $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, så har $\tan\alpha$ värdet

(a) $\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$; (b) $-\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$; (c) $\pm\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$; (d) annat värde.

10. Uttrycket $\sin^2 2\alpha - \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - 2\alpha\right) \cdot \sin\left(2\alpha - \dfrac{\pi}{6}\right)$, är lika med

(a) $\dfrac{1}{4}$; (b) $1 - \dfrac{1}{4}\cos^2 2\alpha$; (c) $1 + \dfrac{1}{4}\cos^2 2\alpha$; (d) inget av (a)-(c).

11. Talet $\dfrac{1+i}{1-i}$ är

(a) positivt; (b) negativt; (c) rent imaginärt; (d) inget av (a)-(c).

12. En funktion har största värde 9. Funktionen kan då *inte* vara

(a) $f_1(x) = x^2 + bx + c$; (b) $f_2(x) = -x^2 + bx + c$;
(c) $f_3(x) = bx + c$; (d) kan ej avgöras.

13. Givet är funktionen $f(x) = |-x^2 - 2x + 3|$. Funktionens minsta värde i intervallet $[-2, 2]$ är

(a) 5; (b) 3; (c) 0; (d) inget av (a)-(c).

14. En rätvinklig triangel har kateter med längderna 5 och 12 längdenheter. Höjden mot hypotenusan har då längden

(a) $\frac{60}{13}$ l.e.; (b) $\frac{30}{13}$ l.e.; (c) annan längd; (d) kan ej avgöras.

15. Om $\tan\alpha, \tan\beta$ är lösningarna till ekvationen $x^2 - 3x - 3 = 0$, så är $\tan(\alpha + \beta)$ lika med

(a) $\frac{3}{4}$; (b) $-\frac{3}{4}$; (c) 0; (d) inget av (a)-(c).

B. Lös uppgifterna nedan; ange endast svar. (2p för varje rätt svar)

16. Beräkna

$$\frac{1}{12} - \frac{2}{5}\left(\frac{7}{6} - \frac{4}{3}\right).$$

Ange svaret på formen $\frac{p}{q}$, där p, q är relativt prima heltal (d.v.s. $SGD(p, q) = 1$).

Svar:

17. Lös ekvationen $4x^2 + 6x + 1 = 0$. Ange den minsta lösningen.

Svar:

18. Derivera funktionen $f(x) = \frac{3x^2 - x}{x^2 + 1}$. Ange $f'(3)$.

Svar:

19. Lös ekvationen $\frac{2^{2x}}{4^x - 3^x} = 4$. Ange summan av alla lösningar.

Svar:

20. Punkterna A, B och C ligger på en cirkel. Givet är att $AB = 4$, $AC = 2$ (längdenheter), samt att vinkeln vid hörnet A i triangeln ABC är $60°$. Beräkna och ange cirkelskivans area.

Svar:

C. Ge fullständig lösning till uppgiften nedan. (max 5p)

Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} (2x-y)(x+y) & = & 0, \\ (x+y)(x-1) & = & (x-y)(y+1)+24. \end{cases}$$

Dugga 1, 15 september 2018 - SVAR

A.

1a
2b
3d
4c
5d
6a
7b
8a
9a
10a
11c
12a
13c
14a
15a

B.

16: $\dfrac{3}{20}$

17: $-\dfrac{3+\sqrt{5}}{4}$

18: $\dfrac{13}{50}$

19: 1

20: 4π

C. *Lösning:* En produkt är lika med noll om och endast om en av faktorerna är lika med noll. Av den första ekvationen följer därför att $y = -x$, eller $y = 2x$.

Fall 1. $y = -x$

Insättning i den andra ekvationen ger efter förenkling andragradsekvationen $x^2 - x - 12 = 0$. Dess lösningar är $x_1 = \dfrac{1-7}{2} = -3,\ x_2 = \dfrac{1+7}{2} = 4$. Motsvarande y-värden blir $y_1 = 3,\ y_2 = -4$.

Fall 2. Insättning resulterar nu i andragradsekvationen $5x^2 - 2x - 24 = 0$. Dess lösningar är $x_3 = \dfrac{12}{5},\ x_4 = -2$, som för y ger $y_3 = 245,\ y_4 = -4$.

Alla lösningar ges alltså av paren

$$(-3, 3), \quad (4, -4), \quad \left(\frac{12}{5}, \frac{24}{5}\right), \quad (-2, -4).$$