Matematik Chalmers

Tentamen i TMV225 Inledande matematik M, 2009–01–17, f V

Telefon: Christoffer Cromvik, 0762–721860
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Varje uppgift är värd 10 poäng, totalt 50 poäng. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Resultat meddelas per epost.

Obs: teknologer inskrivna H06 eller tidigare gör uppgifterna på baksidan!

---

1. (a) Bestäm avståndet från punkten $P = (2, 0, -3)$ till den räta linjen $\mathbf{r} = \mathbf{i}+(1+3t)\mathbf{j}-(3-4t)\mathbf{k}$.

(b) Skriv en MATLAB-funktion som beräknar vektorprojektionen av en vektor $\mathbf{u}$ på en vektor $\mathbf{v}$.

(c) Bestäm en ekvation för det plan som innehåller punkterna $P = (1, 1, 0)$, $Q = (0, 2, 1)$, $R = (3, 2, -1)$.

2. (a) Skissa grafen till funktionen $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 1$. Ange eventuella extremvärden, inflektionspunkter och konkavitet.

(b) Hur många reella rötter har funktionen? Välj ett lämpligt startintervall och genomför två steg av bisektionsalgoritmen för att beräkna den största roten.

(c) Hur många steg behövs för att felet ska bli högst 10^{-6}?

3. (a) Skriv ned definitionen av derivatan av en funktion f i en punkt a.

(b) Låt nu f vara definierad av

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Beräkna derivatan $f'(x)$ för $x \neq 0$.

(c) Använd derivatans definition för att beräkna $f'(0)$ med samma funktion som i del (b).

4. (a) Skriv ned den formella definitionen av gränsvärde $\lim_{x\to a} f(x) = A$.

(b) Skriv ned definitionen av att f är Lipschitz-kontinuerlig på intervallet I.

(c) Vi ska bygga ett kubiskt rum med sidan 10 m. Mitt i rummet står en lodrät pelare från golv till tak med tvärsnittsarean 1 m^2. Bestäm en tolerans för felet i sidan om feltoleransen i volymen (av kuben minus pelaren) är $\pm 1\%$. Tips: Använd Lipschitz-villkoret.

5. (a) Bevisa att om f är kontinuerlig i $[a, b]$ och deriverbar i (a, b) med $f'(x) > 0$ för alla $x \in (a, b)$ så är f strängt växande i $[a, b]$.

(b) Skriv ned fixpunktsatsen (ej beviset).

(c) Beskriv hur man kan skriva om ekvationen $f(x) = 0$ så att fixpunktsatsen kan användas. Vilken omskrivning ger den snabbaste konvergensen?

/stig

Vänd!

För teknologer inskrivna H06 eller tidigare. Skriv "GAMMAL" på omslaget till din anomyna tentamen så att jag kan sortera ut de gamla teknologerna.

1. Till denna uppgift ska du endast lämna in svar, alltså utan motiveringar. (14p)

(a) Bestäm alla lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 11 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

(b) Beräkna derivatan av $g(x) = (x+1)e^{-x^2}$.

(c) Beräkna följande gränsvärde

$$\lim_{x\to\infty} (x^2 + 1/x)e^{-x}.$$

(d) Låt $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Dela upp vektorn $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ i två komponenter $\mathbf{u} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ så att $\mathbf{a}$ är parallell med $\mathbf{v}$ och $\mathbf{b}$ är vinkelrät mot $\mathbf{v}$.

(e) Lös ekvationen $z^2 = -i$. Ge svaret på formen $z = a + ib$.

På uppgift 2–5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. Bestäm en ekvation för det plan som innehåller punkterna $P = (1,1,0)$, $Q = (0,2,1)$, $R = (3,2-1)$. (6p)

3. Bestäm avståndet från punkten $P = (2,0,-3)$ till den räta linjen $\mathbf{r} = \mathbf{i} + (1+3t)\mathbf{j} - (3-4t)\mathbf{k}$. (6p)

4. Skissa grafen till funktionen $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 1$. Ange eventuella extremvärden, inflektionspunkter och konkavitet. (6p)

5. Bestäm värdemängden till funktionen f som definieras av $f(x) = xe^{-x}$, $D_f = [0,\infty)$. (6p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt.

(a) Varje rationell funktion, som inte är ett polynom, har minst en lodrät asymptot.

(b) Varje kontinuerlig funktion är deriverbar.

(c) Om en funktion f är strängt växande på ett intervall så är $f'(x) > 0$ i det intervallet.

(d) Om funktionen $f''(x)$ är kontinuerlig på hela $\mathbf{R}$ och har ett enda nollställe $x = a$ så är f konvex på ett av intervallen $(-\infty, a)$ eller (a, ∞) och konkav på det andra.

(e) Ett homogent ekvationssystem har endast den triviala lösningen om systemet har minst en fri variabel.

(f) Om $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ och $f'(x) > 0$ för alla $x \in (a,b)$ så har f exakt en rot i (a,b).

7. (a) Skriv ned definitionen av derivatan av en funktion f i en punkt a.

(b) Låt nu f vara definierad av

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Beräkna derivatan $f'(x)$ för $x \neq 0$.

(c) Använd derivatans definition för att beräkna $f'(0)$ med samma funktion som i del (b).

`/stig`

TMV225 Inledande matematik M, 2009–01–17, f V. Lösningar.

---

1. (a) Den givna punkten: $P = (2, 0, -3)$. En punkt på linjen: $P_0 = (1, 1, -3)$, en riktningsvektor: $\mathbf{v} = 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. Vektorn $\overline{P_0P} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ projiceras på linjen:

$$\mathbf{a} = \frac{\overline{P_0P} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} = \frac{-3}{25}(3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = \tfrac{-9}{25}\mathbf{j} - \tfrac{-12}{25}\mathbf{k}$$

Ortogonal uppdelning: $\overline{P_0P} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ där

$$\mathbf{b} = \overline{P_0P} - \mathbf{a} = \mathbf{i} - \tfrac{16}{25}\mathbf{j} + \tfrac{12}{25}\mathbf{k}.$$

Det sökta avståndet:

$$s = |\mathbf{b}| = \sqrt{\frac{625 + 256 + 144}{625}} = \sqrt{\frac{1025}{625}} = \sqrt{\frac{41}{25}} = \frac{\sqrt{41}}{5}$$

Alternativt:

$$\begin{aligned}
&s = |\overline{P_0P}| \sin\theta \\
&|\overline{P_0P} \times \mathbf{v}| = |\overline{P_0P}|\,|\mathbf{v}| \sin\theta = s|\mathbf{v}| \\
&s = \frac{|\overline{P_0P} \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} = \frac{|-4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}|}{|\mathbf{v}|} = \frac{\sqrt{16 + 16 + 9}}{5} = \frac{\sqrt{41}}{5}
\end{aligned}$$

(b) Vi skriver filen `vprojection.m`:

```
function w=vprojection(u,v)
% Vector projection of the vector u along the vector v.
%
% Syntax: w=vprojection(u,v)
%
% Input:   u,v - two 1x3 vectors
% Output:  w   - a 1x3 vector

vhat=v/norm(v);
w=dot(u,vhat)*vhat;
```

(c) En normalvektor ges av

$$\mathbf{n} = \overline{PQ} \times \overline{PR} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}.$$

En punkt i planet: $P = (1, 1, 0)$. Planets ekvation:

$$\begin{aligned}
&-2(x-1) + (y-1) - 3(z-0) = 0 \\
&-2x + y - 3z = -1 \\
&2x - y + 3z = 1
\end{aligned}$$

2.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 1, \quad f'(x) = 3x^2 + 6x - 24 = 3((x+1)^2 - 9), \quad f''(x) = 6x + 6.$$

Kritiska punkter ges av

$$f'(x) = 3((x+1)^2 - 9) = 0, \quad x = -4,\ x = 2.$$

Inflektionspunkter ges av

$$f''(x) = 6x + 6 = 0, \quad x = -1.$$

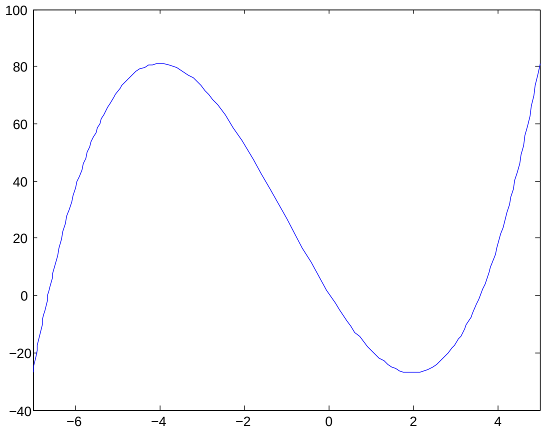
Vi har gränsvärdena

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

Teckentabell:

x		-4		-1		2	
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	växande	81	avtagande	27	avtagande	-27	växande
$f(x)$	konkav	81	konkav	27	konvex	-27	konvex

Alltså: ett lokalt maximum $= 81$ i $x = -4$, ett lokalt minimum $= -27$ i $x = 2$, och en inflektionspunkt -1. Funktionen är konvex (=konkav upp) i $(-1, \infty)$ och konkav (=konkav ned) i $(-\infty, -1)$.



(b) Teckenstudiet i del (a) visar att

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty, \quad f(-4) = 81 > 0, \quad f(2) = -27 < 0, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,$$

och att funktionen är strängt monoton i intervallen $(-\infty, -4)$, $(-4, 2)$ och $(2, \infty)$. Enligt Bolzanos sats finns precis en rot i vardera av dessa intervall. Alltså tre rötter.

För den största roten gör vi ett steg av bisektionsalgoritmen:

$$f(2) = -27 < 0, \; f(4) = 17 > 0$$
$$x_0 = 2, \; X_0 = 4, \; \hat{x}_0 = 3, \; f(3) = -17 < 0$$
$$x_1 = 3, \; X_1 = 4, \; \hat{x}_1 = 3.5$$

(c) Vi har $|x_i - \bar{x}| \le (b-a)2^{-i} = (4-2)2^{-i} = 2^{-i+1}$. Vi bestämmer i så att $2^{-i+1} \le 10^{-6}$. Vi får

$$
\begin{aligned}
&e^{(-i+1)\ln(2)} \le e^{-6\ln(10)} \\
&(-i+1)\ln(2) \le -6\ln(10) \\
&i \ge 1 + 6\ln(10)/\ln(2)
\end{aligned}
$$

Vi tar i lika med heltalstaket av $1 + 6\ln(10)/\ln(2)$. (Det blir 21.)
Man kan även resonera så här: $2^{10} = 1024 > 10^3$ så att $2^{-10} < 10^{-3}$ och $2^{-20} < 10^{-6}$. Alltså: $i - 1 \ge 20$, $i \ge 21$.

3. (a)

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

om gränsvärdet existerar.
(b) Med hjälp av deriveringsregler: $f(x) = x^2 \sin(1/x)$

$$f'(x) = 2x\sin(1/x) + x^2\cos(1/x)\frac{-1}{x^2} = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x), \quad x \neq 0.$$

(c) Med derivatans definition:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2\sin(1/h)}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin(1/h) = 0$$

eftersom $|h\sin(1/h)| \le |h| \to 0$ då $h \to 0$.

4. (a) För varje $\epsilon > 0$ finns $\delta > 0$ sådant att

$$0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - A| < \epsilon.$$

(b) Det finns en konstant L sådan att

$$|f(x) - f(y)| \le L|x-y| \quad \forall x, y \in I.$$

(c) Låt x vara sidan så att volymen blir $V(x) = x^3 - Ax = x^3 - x$ där $A = 1$ m^2 är pelarens tvärsnittsarea. V är kontinuerlig: För varje $\epsilon > 0$ finns $\delta > 0$ sådant att

$$|x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Här är $a = 10$ m och $V(a) = 1000 - 10 = 990$ m^3 de nominella värdena och $\epsilon = \frac{1}{100}990 = 9.90$ m^3. Vi antar att $|x-a| < \delta$. Vi ska bestämma δ. Lipschitz-villkoret ger

$$|V(x) - V(a)| \le L|x-a| < L\delta \le \epsilon \quad \forall x \in I.$$

om $\delta \le \epsilon/L$. Vi beräknar en Lipschitz-konstant på ett lämpligt intervall I som innehåller x och a, till exempel, $I = [9, 11]$. Vi har

$$|V'(x)| = |3x^2 - 1| = 3x^2 - 1 \le 3 \cdot 11^2 - 1 = 362 \quad \forall x \in [9, 11]$$

eftersom maximum inträffar i högra ändpunkten. Vi tar $L = 362$. Alltså:

$$\delta \le \frac{\epsilon}{L} = \frac{9.90}{362} \qquad (\approx 0.0273)$$

Vi tar δ lite mindre för enkelhets skull:

$$\delta = \frac{8}{400} = 0.02 \text{ m}.$$

5. Antag $a \leq x < y \leq b$. Medelvärdessatsen på $[x, y]$ ger oss $s \in (x, y)$ så att

$$f(y) - f(y) = f'(s)(y - x) > 0$$

eftersom $f'(s) >$ för alla $s \in (a, b)$ och $y - x > 0$. Alltså: $f(x) < f(y)$ och vi drar slutsatsen att f är strängt växande.

(b) Fixpunktsatsen. Antaganden:

- I är ett slutet intervall,
- $g : I \to I$,
- g är en kontraktion på I, dvs $L_g < 1$.

Slutsats: Då finns exakt en punkt $x \in [a, b]$ sådan att $g(x) = x$. Fixpunkten fås som gränsvärdet $x = \lim_{i\to\infty} x_i$ av iterationen $x_i = g(x_{i-1})$ med godtycklig startpunkt $x_0 \in I$.

(c) Man skriver om $f(x) = 0$ som $x = x - \alpha(x)f(x)$ där funktionen $\alpha(x) \neq 0$ nära roten. Svårigheten är att välja $\alpha(x)$ så att antagandena i fixpunktsatsen blir uppfyllda för $g(x) = x - \alpha(x)f(x)$ och något intervall I. Om f är deriverbar kan man ta $\alpha(x) = 1/f'(x)$. Då fås Newtons metod: $x_i = x_{i-1} - f(x_{i-1})/f'(x_{i-1})$ vilken är snabbast.

`/stig`

För teknologer inskrivna H06 eller tidigare

1. (a) Gauss elimination ger

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 11 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right]\begin{array}{c} -1 \\ 2 \end{array} \iff \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 11 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right]\begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \iff \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 14 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Fri variabel: $x_3 = t$. Sedan fås

$$x_2 = 3 - t, \quad x_1 = 7 - 2t$$

Vi får oändligt många lösningar:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 - 2t \\ 3 - t \\ t \end{bmatrix}$$

(b) $g'(x) = -(2x^2 + 2x - 1)e^{-x^2}$

(c) 0

(d) $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$, $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$, $\mathbf{u} = (4, 5, 6)$.

$$\mathbf{a} = \mathbf{u}_{\mathbf{v}} = (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} = \frac{15}{3}(1, 1, 1) = (5, 5, 5)$$
$$\mathbf{b} = \mathbf{u} - \mathbf{a} = (4, 5, 6) - (5, 5, 5) = (-1, 0, 1)$$

(e) $z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$

2. Se 1(c) ovan.

3. Se 1(a) ovan.

4. Se 2(a) ovan.

5. $R_f = [0, e^{-1}]$

6. Sant: endast f.

7. Se 3 ovan.