Matematik Chalmers

Tentamen i TMV225 Inledande matematik M, 2009–08–21, f

Telefon: Jonatan Vasilis, 0762–721861
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Varje uppgift är värd 10 poäng, totalt 50 poäng. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Resultat meddelas per epost.

Obs: teknologer inskrivna H06 eller tidigare gör uppgifterna på baksidan!

---

1. (a) Bestäm avståndet från punkten $P = (2, 0, -3)$ till den räta linjen $\mathbf{r} = \mathbf{i} + (1+3t)\mathbf{j} - (3-4t)\mathbf{k}$.

(b) Skriv en MATLAB-funktion som beräknar vektorprojektionen av en vektor $\mathbf{u}$ på en vektor $\mathbf{v}$.

(c) Bestäm en ekvation för det plan som innehåller punkterna $P = (1, 1, 0)$, $Q = (0, 2, 1)$, $R = (3, 2, -1)$.

2. (a) Skissa grafen till funktionen $f(x) = e^{x-2} - x$. Ange eventuella extremvärden, inflektionspunkter och konkavitet.

(b) Hur många reella rötter har funktionen? Välj ett lämpligt startintervall och genomför två steg av bisektionsalgoritmen för att beräkna den minsta roten.

(c) Hur många steg behövs för att felet ska bli högst 10^{-6}?

3. (a) Skriv ned fixpunktsatsen (ej beviset).

(b) Visa att Lipschitz-konstanten L_g för funktionen $g(x) = e^{x-2}$ på intervallet $[0, 1]$ uppfyller villkoret $L_g < 1$.

(c) Visa att funktionen $g(x) = e^{x-2}$ har en unik fixpunkt i intervallet $[0, 1]$.

4. (a) Skriv en Matlab-funktion som implementerar bisektionsalgoritmen.

(b) Skriv ned hur man använder detta för att hitta minsta roten i uppgift 2b.

5. (a) Formulera medelvärdessatsen.

(b) Använd denna för att bevisa att $f'(x) = 0$ för alla $x \in I$ medför att f är konstant på I.

`/stig`

Vänd!

För teknologer inskrivna H06 eller tidigare. Skriv "GAMMAL" på omslaget till din anomyna tentamen så att jag kan sortera ut de gamla teknologerna.

1. Till denna uppgift ska du endast lämna in svar, alltså utan motiveringar. (14p)

(a) Bestäm alla lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 11 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

(b) Beräkna derivatan av $g(x) = (x+1)e^{-x^2}$.

(c) Beräkna följande gränsvärde

$$\lim_{x\to\infty} (x^2 + 1/x)e^{-x}.$$

(d) Låt $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Dela upp vektorn $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ i två komponenter $\mathbf{u} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ så att $\mathbf{a}$ är parallell med $\mathbf{v}$ och $\mathbf{b}$ är vinkelrät mot $\mathbf{v}$.

(e) Lös ekvationen $z^2 = -i$. Ge svaret på formen $z = a + ib$.

På uppgift 2–5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. Bestäm en ekvation för det plan som innehåller punkterna $P = (1,1,0)$, $Q = (0,2,1)$, $R = (3,2-1)$. (6p)

3. Bestäm avståndet från punkten $P = (2,0,-3)$ till den räta linjen $\mathbf{r} = \mathbf{i} + (1+3t)\mathbf{j} - (3-4t)\mathbf{k}$. (6p)

4. Skissa grafen till funktionen $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 1$. Ange eventuella extremvärden, inflektionspunkter och konkavitet. (6p)

5. Bestäm värdemängden till funktionen f som definieras av $f(x) = xe^{-x}$, $D_f = [0, \infty)$. (6p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt.

(a) Varje rationell funktion, som inte är ett polynom, har minst en lodrät asymptot.

(b) Om $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ och $f'(x) > 0$ för alla $x \in (a,b)$ så har f exakt en rot i (a,b).

(c) Om en funktion f är strängt växande på ett intervall så är $f'(x) > 0$ i det intervallet.

(d) Om funktionen $f''(x)$ är kontinuerlig på hela $\mathbf{R}$ och har ett enda nollställe $x = a$ så är f konvex på ett av intervallen $(-\infty, a)$ eller (a, ∞) och konkav på det andra.

(e) Ett homogent ekvationssystem har endast den triviala lösningen om systemet har minst en fri variabel.

(f) Varje kontinuerlig funktion är deriverbar.

7. (a) Skriv ned definitionen av derivatan av en funktion f i en punkt a.

(b) Låt nu f vara definierad av

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Beräkna derivatan $f'(x)$ för $x \neq 0$.

(c) Använd derivatans definition för att beräkna $f'(0)$ med samma funktion som i del (b).

`/stig`

TMV225 Inledande matematik M, 2009–08–21, f. Lösningar.

---

1. (a) Den givna punkten: $P = (2, 0, -3)$. En punkt på linjen: $P_0 = (1, 1, -3)$, en riktningsvektor: $\mathbf{v} = 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. Vektorn $\overline{P_0P} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ projiceras på linjen:

$$\mathbf{a} = \frac{\overline{P_0P} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} = \frac{-3}{25}(3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = \tfrac{-9}{25}\mathbf{j} - \tfrac{-12}{25}\mathbf{k}$$

Ortogonal uppdelning: $\overline{P_0P} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ där

$$\mathbf{b} = \overline{P_0P} - \mathbf{a} = \mathbf{i} - \tfrac{16}{25}\mathbf{j} + \tfrac{12}{25}\mathbf{k}.$$

Det sökta avståndet:

$$s = |\mathbf{b}| = \sqrt{\frac{625 + 256 + 144}{625}} = \sqrt{\frac{1025}{625}} = \sqrt{\frac{41}{25}} = \frac{\sqrt{41}}{5}$$

Alternativt:

$$\begin{aligned}
&s = |\overline{P_0P}| \sin\theta \\
&|\overline{P_0P} \times \mathbf{v}| = |\overline{P_0P}|\,|\mathbf{v}| \sin\theta = s|\mathbf{v}| \\
&s = \frac{|\overline{P_0P} \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} = \frac{|-4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}|}{|\mathbf{v}|} = \frac{\sqrt{16 + 16 + 9}}{5} = \frac{\sqrt{41}}{5}
\end{aligned}$$

(b) Vi skriver filen `vprojection.m`:

```
function w=vprojection(u,v)
% Vector projection of the vector u along the vector v.
%
% Syntax: w=vprojection(u,v)
%
% Input:   u,v - two 1x3 vectors
% Output:  w   - a 1x3 vector

vhat=v/norm(v);
w=dot(u,vhat)*vhat;
```

(c) En normalvektor ges av

$$\mathbf{n} = \overline{PQ} \times \overline{PR} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}.$$

En punkt i planet: $P = (1, 1, 0)$. Planets ekvation:

$$\begin{aligned}
&-2(x-1) + (y-1) - 3(z-0) = 0 \\
&-2x + y - 3z = -1 \\
&2x - y + 3z = 1
\end{aligned}$$

2.

$$f(x) = e^{x-2} - x, \quad f'(x) = e^{x-2} - 1, \quad f''(x) = e^{x-2}.$$

Det finns inga singulära punkter. Kritiska punkter ges av

$$f'(x) = e^{x-2} - 1 = 0, \quad \text{dvs } x = 2.$$

Andraderivatan

$$f''(x) = e^{x-2} > 0,$$

så att vi har inga inflektionspunkter. Vi har gränsvärdena

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

Teckentabell:

x		2	
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	avtagande	-1	växande
$f(x)$	konvex	1	konvex

Alltså: ett lokalt lokalt minimum $= -1$ i $x = 2$. Funktionen är konvex (=konkav upp).

(b) Teckenstudiet i del (a) visar att funktionen är strängt monoton i intervallen $(-\infty, 2)$, och $(2, \infty)$ och att funktionen växlar tecken där. Enligt Bolzanos sats finns precis en rot i vardera av dessa intervall. Alltså två rötter.

För den minsta roten gör vi ett steg av bisektionsalgoritmen:

$$\begin{aligned}
&f(0) = e^{-2} > 0,\ f(2) = -1 < 0\\
&x_0 = 0,\ X_0 = 2,\ \hat{x}_0 = 1,\ f(1) = e^{-1} - 1 < 0\\
&x_1 = 0,\ X_1 = 1,\ \hat{x}_1 = 0.5
\end{aligned}$$

(c) Vi har $|x_i - \bar{x}| \le (b-a)2^{-i} = (2-0)2^{-i} = 2^{-i+1}$. Vi bestämmer i så att $2^{-i+1} \le 10^{-6}$. Vi får

$$\begin{aligned}
&e^{(-i+1)\ln(2)} \le e^{-6\ln(10)}\\
&(-i+1)\ln(2) \le -6\ln(10)\\
&i \ge 1 + 6\ln(10)/\ln(2)
\end{aligned}$$

Vi tar i lika med heltalstaket av $1 + 6\ln(10)/\ln(2)$. (Det blir 21.)

Man kan även resonera så här: $2^{10} = 1024 > 10^3$ så att $2^{-10} < 10^{-3}$ och $2^{-20} < 10^{-6}$. Alltså: $i - 1 \ge 20$, $i \ge 21$.

3. (a) Fixpunktsatsen. Antaganden:

- I är ett slutet intervall,
- $g : I \to I$,
- g är en kontraktion på I, dvs $L_g < 1$.

Slutsats: Då finns exakt en punkt $x \in [a, b]$ sådan att $g(x) = x$. Fixpunkten fås som gränsvärdet $x = \lim_{i\to\infty} x_i$ av iterationen $x_i = g(x_{i-1})$ med godtycklig startpunkt $x_0 \in I$.

(b) Vi använder

$$L_g = \max_{x\in I} |g'(x)|.$$

Vi har $I = [0, 1]$ och $g'(x) = e^{x-2}$. Funktionen g' är växande så att

$$e^{-2} = g'(0) \le g'(x) \le g'(1) = e^{-1}, \quad \text{för } x \in [0, 1],$$

så att

$$L_g = \max_{x\in I} |g'(x)| = e^{-1} < 1.$$

(c) För att tillämpa fixpunktsatsen måste vi även visa att $g : I \to I$, dvs att $x \in [0, 1]$ medför att $g(x) \in [0, 1]$. Men g är växande så att

$$0 < e^{-2} = g(0) \leq g(x) \leq g(1) = e^{-1} < 1, \quad \text{för } x \in [0, 1].$$

Fixpunktsatsen visar nu att det finns en unik fixpunkt i intervallet $[0, 1]$. Denna är densamma som den minsta roten till f i uppgift 2b.

4. (a)

```
function x = bisect(f, int, tol)

a=int(1);                    % left endpoint of interval
b=int(2);                    % right endpoint

while b-a>tol

  x=(a+b)/2             % compute the midpoint x of (current) interval [a b]
  fx=f(x);               % evaluate f at midpoint

  if fx==0                     % root at x
      return                   % stop
  elseif f(a)*fx<0             % root in the left half
    b=x;                       % move b
    fb=f(b);                   % update fb
  else                         % root in the right half
    a=x;
    fa=f(a);
  end

end

x=(a+b)/2;   % compute midpoint one more time
```

(b) Man skriver en funktionsfil `funk.m`:

```
function y=funk(x)
  y=exp(x-2)-x;
```

och sedan kommandoraden

```
>> x = bisect(@funk, [0,2], 1e-6)
```

5. Se Adams.

`/stig`

För teknologer inskrivna H06 eller tidigare

1. (a) Gauss elimination ger

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 11 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} -1 \\ 2 \end{array} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 11 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 14 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Fri variabel: $x_3 = t$. Sedan fås

$$x_2 = 3 - t, \quad x_1 = 7 - 2t$$

Vi får oändligt många lösningar:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-2t \\ 3-t \\ t \end{bmatrix}$$

(b) $g'(x) = -(2x^2 + 2x - 1)e^{-x^2}$

(c) 0

(d) $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$, $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$, $\mathbf{u} = (4, 5, 6)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{u}_{\mathbf{v}} = (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} = \frac{15}{3}(1, 1, 1) = (5, 5, 5) \\ \mathbf{b} &= \mathbf{u} - \mathbf{a} = (4, 5, 6) - (5, 5, 5) = (-1, 0, 1) \end{aligned}$$

(e) $z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$

2. En normalvektor ges av

$$\mathbf{n} = \overline{PQ} \times \overline{PR} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}.$$

En punkt i planet: $P = (1, 1, 0)$. Planets ekvation:

$$\begin{aligned} &-2(x-1) + (y-1) - 3(z-0) = 0 \\ &-2x + y - 3z = -1 \\ &2x - y + 3z = 1 \end{aligned}$$

3. Den givna punkten: $P = (2, 0, -3)$. En punkt på linjen: $P_0 = (1, 1, -3)$, en riktningsvektor: $\mathbf{v} = 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. Vektorn $\overline{P_0P} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ projiceras på linjen:

$$\mathbf{a} = \frac{\overline{P_0P} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} = \frac{-3}{25}(3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = \tfrac{-9}{25}\mathbf{j} - \tfrac{-12}{25}\mathbf{k}$$

Ortogonal uppdelning: $\overline{P_0P} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ där

$$\mathbf{b} = \overline{P_0P} - \mathbf{a} = \mathbf{i} - \tfrac{16}{25}\mathbf{j} + \tfrac{12}{25}\mathbf{k}.$$

Det sökta avståndet:

$$s = |\mathbf{b}| = \sqrt{\frac{625 + 256 + 144}{625}} = \sqrt{\frac{1025}{625}} = \sqrt{\frac{41}{25}} = \frac{\sqrt{41}}{5}$$

Alternativt:

$$\begin{aligned} s &= |\overline{P_0P}| \sin\theta \\ |\overline{P_0P} \times \mathbf{v}| &= |\overline{P_0P}|\,|\mathbf{v}| \sin\theta = s|\mathbf{v}| \\ s &= \frac{|\overline{P_0P} \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} = \frac{|-4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}|}{|\mathbf{v}|} = \frac{\sqrt{16 + 16 + 9}}{5} = \frac{\sqrt{41}}{5} \end{aligned}$$

4.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 1, \quad f'(x) = 3x^2 + 6x - 24 = 3((x+1)^2 - 9), \quad f''(x) = 6x + 6.$$

Kritiska punkter ges av

$$f'(x) = 3((x+1)^2 - 9) = 0, \quad x = -4,\ x = 2.$$

Inflektionspunkter ges av

$$f''(x) = 6x + 6 = 0, \quad x = -1.$$

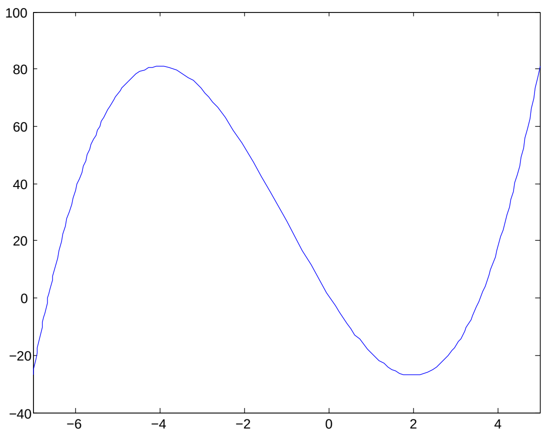
Vi har gränsvärdena

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

Teckentabell:

x		-4		-1		2	
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	växande	81	avtagande	27	avtagande	-27	växande
$f(x)$	konkav	81	konkav	27	konvex	-27	konvex

Alltså: ett lokalt maximum $= 81$ i $x = -4$, ett lokalt minimum $= -27$ i $x = 2$, och en inflektionspunkt -1. Funktionen är konvex (=konkav upp) i $(-1, \infty)$ och konkav (=konkav ned) i $(-\infty, -1)$.



5. $R_f = [0, e^{-1}]$

6. Sant: endast b.

7. (a)

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

om gränsvärdet existerar.

(b) Med hjälp av deriveringsregler: $f(x) = x^2 \sin(1/x)$

$$f'(x) = 2x \sin(1/x) + x^2 \cos(1/x) \frac{-1}{x^2} = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x), \quad x \neq 0.$$

(c) Med derivatans definition:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin(1/h) = 0$$

eftersom $|h \sin(1/h)| \leq |h| \to 0$ då $h \to 0$.