Matematik Chalmers

Tentamen i TMV225 Inledande matematik M, 2009–10–24, f M

Telefon: Fredrik Lindgren, 0703–088304
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Resultat meddelas per epost.

---

1. Till denna uppgift ska du endast lämna in svar. (7×2 p = 14 p)

(a) En rät linje går genom punkterna $P = (1, 2, 3)$ och $Q = (4, 5, 6)$. Skriv ned linjens ekvation på parameterform.

(b) Ett plan går genom origo och punkterna P och Q i (a). Skriv ned planets ekvation.

(c) Skriv ned Taylors polynom av grad 2 för $\ln(x)$ kring $x = 2$.

(d) Bestäm vektorprojektionen av vektorn $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ på vektorn $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

(e) Bestäm gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin(2x)}$.

(f) Skriv ned fixpunktsiterationen (fixpunktsalgoritmen) i form av en MATLAB funktionsfil.

(g) Skriv ned hur man plottar grafen till funktionen $f(x) = |x^2 - 2x - 15|$ på intervallet $[0, 6]$ med hjälp av MATLAB. (Skriv alla kommandon och filer som behövs.)

2. (a) Formulera satsen om lokalisering av lokala extremvärden. (3 p)

(b) Använd satsen för att skissa grafen av funktionen $f(x) = |x^2 - 2x - 15|$ på intervallet $[0, 6]$ och bestämma lokala maxima och minima. (6 p)

3. Bestäm en Lipschitz-konstant till funktionen $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 15x$ på intervallet $[0, 6]$. (3 p)

4. Skriv en MATLAB-funktion med deklarationen `function [a,b]=ortogonal(u,v)` som beräknar en ortogonal uppdelning $\mathbf{u} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, där $\mathbf{a}$ är parallell med $\mathbf{v}$ och $\mathbf{b}$ är ortogonal mot $\mathbf{v}$. (6 p)

5. Vinkelfrekvensen f hos en pendel beror på pendelns längd x enligt formeln $f(x) = \sqrt{g/x}$, där $g = 9.81$ m/s^2 är tyngdkraftsaccelerationen. För att det ska gå att räkna för hand använder vi $g = 9$ m/s^2, dvs $f(x) = \sqrt{9/x}$. Vi vill tillverka en pendel med vinkelfrekvensen 1 s^{-1} med toleransen 0.01 s^{-1} och nominella längden 9 m. Hur noggrannt måste längden göras? Du måste använda Lipschitz-villkoret för f. (6 p)

6. Använd linjärisering för att beräkna en approximation till $\sqrt{25.1}$. Ange en begränsning av felet. Ge svaret i form av decimaltal. (6 p)

7. (a) Formulera Bolzanos sats. (3 p)

(b) Skriv ned den del av beviset där man visar att följden är en Cauchy-följd. (3 p)

`/stig`

Vänd!

För teknologer inskrivna H06 eller tidigare.

1. Till denna uppgift ska du endast lämna in svar. (7×2 p $= 14$ p)

(a) En rät linje går genom punkterna $P = (1, 2, 3)$ och $Q = (4, 5, 6)$. Skriv ned linjens ekvation på parameterform.

(b) Ett plan går genom origo och punkterna P och Q i (a). Skriv ned planets ekvation.

(c) Skriv ned Taylors polynom av grad 2 för $\ln(x)$ kring $x = 2$.

(d) Bestäm vektorprojektionen av vektorn $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ på vektorn $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

(e) Bestäm gränsvärdet $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin(2x)}$.

(f) Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(2x+1)}{x}$$

(g) Beräkna derivatan av $g(x) = (x+1)e^{-x}$.

2. (a) Formulera satsen om lokalisering av lokala extremvärden. (3 p)

(b) Använd satsen för att skissa grafen av funktionen $f(x) = |x^2 - 2x - 15|$ på intervallet $[0, 6]$ och bestämma lokala maxima och minima. (6 p)

3. Bestäm alla lösningar till ekvationssystemet (3 p)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

4. Uttryck vektorn $\mathbf{a} = (2, 1, 1)$ som en summa $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ där $\mathbf{u}$ är parallell med vektorn $\mathbf{b} = (1, 1, 0)$ och $\mathbf{v}$ är ortogonal mot $\mathbf{u}$. (6 p)

5. Ange ekvationen för tangenten till kurvan $y = \arctan(1 + x^2)$ i den punkt på kurvan där $x = 1$. (6 p)

6. Använd linjärisering för att beräkna en approximation till $\sqrt{25.1}$. Ange en begränsning av felet. Ge svaret i form av decimaltal. (6 p)

7. (a) Definiera vad som menas med att en funktion f är strängt växande på ett intervall I. (2 p)

(b) Formulera medelvärdessatsen för derivator. (2 p)

(c) Visa, med hjälp av medelvärdessatsen, att en funktion f är strängt växande på intervallet I om $f'(x) > 0$ för alla $x \in I$. (2 p)

`/stig`

TMV225 Inledande matematik M, 2009–10–24, f M. Lösningar.

---

1. (a) $\mathbf{v} = \overline{PQ} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$

(b) En normalvektor: $\mathbf{n} = \overline{OP} \times \overline{OQ} = (1, 2, 3) \times (4, 5, 6) = (-3, 6, -3)$. Planets ekvation blir:

$$\begin{aligned} &-3(x - 0) + 6(y - 0) - 3(z - 0) = 0 \\ &-x + 2y - z = 0 \end{aligned}$$

(c) $P_2(x) = \ln 2 + \frac{1}{2}(x - 2) - \frac{1}{8}(x - 2)^2$

(d) $\mathbf{u_v} = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} = \dfrac{32}{14}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = \dfrac{16}{7}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$

(e) $\dfrac{e^x - 1}{\sin(2x)} = \dfrac{1 + x + O(x^2) - 1}{2x + O(x^3)} = \dfrac{x + O(x^2)}{2x + O(x^3)} = \dfrac{1 + O(x)}{2 + O(x^2)} \to \dfrac{1 + 0}{2 + 0} = \dfrac{1}{2}$ när $x \to 0$

(f)

```
function x=fixpoint(g,x0,tol)
% fixpoint - fixed point iteration for the scalar equation x=g(x)
%
%   Syntax:
%           x = fixpoint(g,x0,tol)
%   Arguments:
%           g - function handle pointing to a function file
%           x0 - a real number, the initial approximation
%           tol - a tolerance
%   Returns:
%           x - a number, the approximate solution
%-----------------------------------------------------------------------

x1=x0;
x=g(x1);
while abs(x1-x)>tol
    x1=x;
    x=g(x1);
end
```

(g) En funktionsfil `funk.m`:

```
function y=funk(x)
  y=abs(x.^2-2*x-15);
```

På kommandoraden:

```
>> x=linspace(0,6);
>> y=funk(x);
>> plot(x,y)
>> grid on
```

Eller

```
>> fplot(@funk,[0,6])
```

Eller

```
>> fplot(@(x)[abs(x.^2-2*x-15)],[0,6])
```

2. (a) Om $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ har lokalt extremvärde i x_0 så är x_0 en av följande:

(i) kritisk punkt, dvs $f'(x_0) = 0$;

(ii) singulär punkt, dvs $f'(x_0)$ existerar ej;

(iii) ändpunkt till intervallet, dvs $x_0 = a$ eller $x_0 = b$.

(b) Vi undersöker först $x^2 - 2x - 15 = (x-1)^2 - 16 = 0$, dvs $x = 1 \pm 4$. Den byter tecken vid $x = -3$ och $x = 5$. Alltså, på intervallet $[0,6]$:

$$f(x) = |x^2 - 2x - 15| = \begin{cases} -(x^2 - 2x - 15), & x \in [0,5], \\ x^2 - 2x - 15, & x \in [5,6], \end{cases}$$

och

$$f'(x) = \begin{cases} -(2x-2), & x \in [0,5), \\ 2x - 2, & x \in (5,6]. \end{cases}$$

Alternativt kan man använda $\frac{d}{dx}|x| = \mathrm{sign}(x) = x/|x|$ för $x \neq 0$, så att

$$f'(x) = \mathrm{sign}(x^2 - 2x - 15)(2x-2) = \frac{x^2 - 2x - 15}{|x^2 - 2x - 15|}(2x-2), \quad x \neq -3, 5.$$

I intervallet $[0,6]$ har vi då en kritisk punkt: $x = 1$, en singulär punkt: $x = 5$, och ändpunkter: $x = 0$, $x = 6$. Teckentabell:

x	0		1		5		6
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	odef	$+$	$+$
$f(x)$	15	växande	16	avtagande	0	växande	9

Lokalt maximum: 16 i $x = 1$.

Lokalt maximum: 9 i $x = 6$.

Lokalt minimum: 15 i $x = 0$.

Lokalt minimum: 0 i $x = 5$.

3. Enligt uppgift 2 har vi

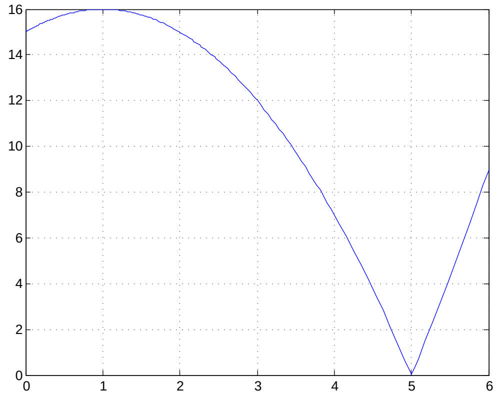
$$|F'(x)| = |x^2 - 2x - 15| \leq 16 \quad \forall x \in [0,6].$$

Vi tar $L = 16$.

4.

```
function [a,b]=ortogonal(u,v)
% Ortogonal uppdelning.
%
% Syntax: [a,b]=ortogonal(u,v)
%
% Input:   u,v - two 1x3 vectors
% Output:  a,b - two 1x3 vectors

vhat=v/norm(v);       % normera vektorn v
a=dot(u,vhat)*vhat;   % vektorprojektion
b=u-a;
```



5. Vi använder $f(x) = \sqrt{9/x} = 3x^{-1/2}$. Vi har nominella värden $a = 9$ m och $f(a) = 1\ \mathrm{s}^{-1}$ och toleransen $\epsilon = 0.01$. Vi bestämmer en Lipschitz-konstant på intervallet $[8, 10]$.

$$|f'(x)| = |-\frac{3}{2}x^{-3/2}| = \frac{3}{2}x^{-3/2} \le \frac{3}{2}8^{-3/2} = \frac{3}{2}\frac{1}{8^{3/2}} = \frac{3}{2}\frac{1}{16\sqrt{2}} \le \frac{3}{2}\frac{1}{16} = \frac{3}{32} \le \frac{3}{30} \le \frac{1}{10}$$

Vi tar $L = 0.1$.

Antag $|x - a| = |x - 9| < \delta$. Lipschitz-villkoret ger

$$|f(x) - 1| = |f(x) - f(a)| \le L|x - a| < L\delta$$

Detta blir $< \epsilon$ om $L\delta \le \epsilon$, dvs om

$$\delta \le \frac{\epsilon}{L} = \frac{0.01}{0.1} = 0.1$$

6. Vi har $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 25$, $f(a) = 5$, $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$, $f'(a) = \frac{1}{10}$, och $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$. Linjäriseringen är

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = 5 + \frac{1}{10}(x - 25)$$

och den linjära approximationen

$$\sqrt{25.1} = f(25.1) \approx L(25.1) = 5 + \frac{0.1}{10} = 5.01$$

Vi har begränsningen

$$|f''(t)| = \frac{1}{4}t^{-3/2} \leq \frac{1}{4}25^{-3/2} = \frac{1}{4}\frac{1}{125} = \frac{1}{500} = 0.002 \quad \forall t \in [25, 25.1].$$

Linjäriseringsfelet blir

$$|E_f(25.1)| = |\frac{1}{2}f''(s)(x-a)^2| = \frac{1}{2}|f''(s)|0.01 \leq \frac{1}{2} \cdot 0.002 \cdot 0.01 = 0.00001$$

7. (a) Om f är kontinuerlig på intervallet $[a, b]$ och $f(a)f(b) < 0$ så finns $\bar{x} \in (a, b)$ sådan att $f(\bar{x}) = 0$. Om f är strängt monoton så är $\bar{x}$ unik.
(b) På grund av intervallhalvering har vi $|x_i - x_j| \leq 2^{-i}(b-a)$ om $j > i$. Tag $\epsilon > 0$ och bestäm i så att $2^{-i}(b-a) \leq \epsilon$. Vi får $-i\ln(2) + \ln(b-a) \leq \ln(\epsilon)$ dvs $i \geq \frac{\ln(b-a)-\ln(\epsilon)}{\ln(2)}$.

För teknologer inskrivna H06 eller tidigare.

1. (a)–(e) Som ovan.
(f) 0.
(g) $-xe^{-x}$

2. Som ovan.

3. $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

4. $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0) + (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$

5. $y = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{5}(x-1)$

6. Som ovan.

7. Se boken.

`/stig`