Matematik Chalmers

Tentamen i TMV225 Inledande matematik M, 2010–01–16, f J

Telefon: Aron Lagerberg, 0703–088304
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Resultat meddelas per epost. Rättningen förväntas inte bli klar förrän omkring den 2 februari på grund av utlandsvistelse.

Granskning: torsdag 11 februari, 12–13, hos Stig Larsson.

Obs: teknologer inskrivna H06 eller tidigare gör uppgifterna på baksidan!

---

1. Till denna uppgift ska du endast lämna in svar. (7×2 p $= 14$ p)

(a) Bestäm ekvationen för det plan, som går genom punkten $(1, 0, -3)$ och som är ortogonalt mot linjen $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{12} = \frac{z}{3}$.

(b) Bestäm en ekvation på parameterform till skärningslinjen mellan planen $2x + y = 3$ och $y + 2z = 1$.

(c) Skriv ned Taylors polynom av grad 2 för $\exp(1/x)$ kring $x = 1$.

(d) Bestäm vektorprojektionen av vektorn $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ på vektorn $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

(e) Bestäm gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1 - \frac{1}{2}x^2}{x^4}$.

(f) Skriv ned algoritmen för Newtons metod i form av en MATLAB funktionsfil.

(g) Bestäm alla reella tal x som uppfyller $\displaystyle\left|\frac{x}{1+x} - 1\right| < 10^{-6}$.

2. Låt $f(x) = \exp(1/x)$. Bestäm funktionens definitionsmängd och värdemängd. Skissa dess graf. Ange konkavitet och inflektionspunkter. Undersök dess beteende då $x \to 0$ och $x \to \pm\infty$. (6 p)

3. Bestäm en Lipschitz-konstant till funktionen $f(x) = \exp(1/x)$ på intervallet $[1, 6]$. (6 p)

4. Visa att $\ln(1 + x) > \dfrac{x}{1+x}$ för $x > 0$. (6 p)

5. Vad menas med att en funktion är inverterbar (”one-to-one”)? Visa att funktionen $f(x) = x^3+2x$ är inverterbar. Beräkna derivatan i punkten 0 av dess inversa funktion, dvs $(f^{-1})'(0)$. (6 p)

6. Använd Gauss eliminationsmetod för att lösa (6 p)

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x - y + 8z = -1 \\ 2x + 3y + z = 8 \end{cases}$$

7. (a) Definiera vad som menas med att en funktion f är strängt växande på ett intervall I. (2 p)

(b) Formulera medelvärdessatsen för derivator. (2 p)

(c) Visa, med hjälp av medelvärdessatsen, att en funktion f är strängt växande på intervallet I om $f'(x) > 0$ för alla $x \in I$. (2 p)

/stig

Vänd!

För teknologer inskrivna H06 eller tidigare.

1. Till denna uppgift ska du endast lämna in svar. (7×2 p $= 14$ p)

(a) Bestäm ekvationen för det plan, som går genom punkten $(1, 0, -3)$ och som är ortogonalt mot linjen $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{12} = \frac{z}{3}$.

(b) Bestäm en ekvation på parameterform till skärningslinjen mellan planen $2x + y = 3$ och $y + 2z = 1$.

(c) Skriv ned Taylors polynom av grad 2 för $\exp(1/x)$ kring $x = 1$.

(d) Bestäm vektorprojektionen av vektorn $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ på vektorn $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

(e) Bestäm gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1 - \frac{1}{2}x^2}{x^4}$.

(f) Beräkna $f'(1)$ då $f(x) = \dfrac{\arctan x}{1 + x^2}$.

(g) Bestäm alla reella tal x som uppfyller $\left| \dfrac{x}{1+x} - 1 \right| < 10^{-6}$.

2. Låt $f(x) = \exp(1/x)$. Bestäm funktionens definitionsmängd och värdemängd. Skissa dess graf. Ange konkavitet och inflektionspunkter. Undersök dess beteende då $x \to 0$ och $x \to \pm\infty$. (6 p)

3. Bestäm avståndet från punkten $(4, -3, 2)$ till planet $2x - y + 3z = 7$. (6 p)

4. Visa att $\ln(1 + x) > \dfrac{x}{1 + x}$ för $x > 0$. (6 p)

5. Vad menas med att en funktion är inverterbar ("one-to-one")? Visa att funktionen $f(x) = x^3 + 2x$ är inverterbar. Beräkna derivatan i punkten 0 av dess inversa funktion, dvs $(f^{-1})'(0)$. (6 p)

6. Använd Gauss eliminationsmetod för att lösa (6 p)

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x - y + 8z = -1 \\ 2x + 3y + z = 8 \end{cases}$$

7. (a) Definiera vad som menas med att en funktion f är strängt växande på ett intervall I. (2 p)

(b) Formulera medelvärdessatsen för derivator. (2 p)

(c) Visa, med hjälp av medelvärdessatsen, att en funktion f är strängt växande på intervallet I om $f'(x) > 0$ för alla $x \in I$. (2 p)

/stig

TMV225 Inledande matematik M, 2010–01–16, f J. Lösningar.

---

1. (a) $2x + 12y + 3z = -7$

(b) Vi löser ekv systemet

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ y + 2z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}$$

(c) $P_2(x) = e(1 - (x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2)$

(d) $\mathbf{u}_\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} = \dfrac{-3}{6}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = \dfrac{-1}{2}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})$

(e) $\dfrac{1}{24}$

(f)

```
function x = newton(f,x0,tol)
% Newton's method for a scalar equation f(x)=0

x = x0;
h = tol + 1;                 % faked step, to get started

while abs(h)>tol
   a = derivative(f,x);      % evaluate the derivative a=f'(x)
   b = -f(x);                % evaluate the residual b=-f(x)
   h = b/a;                  % compute the step
   x = x + h;                % update
end
```

(g) $x > -1 + 10^6$ eller $x < -1 - 10^6$

2. Vi har

$$f(x) = \exp(1/x)$$
$$f'(x) = \frac{-1}{x^2}\exp(1/x)$$
$$f''(x) = \frac{1+2x}{x^4}\exp(1/x)$$

Definitionsmängd: $D_f = (-\infty, 0) \cap (0, \infty)$. Inga singulära punkter ty $f'(x) < 0$. Andra derivatan: $f''(x) = 0$ endast i $x = -\frac{1}{2}$.

Teckentabell:

x		$-\frac{1}{2}$		0	
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	odef	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	odef	$+$
$f(x)$	avtagande	e^{-2}	avtagande	odef	avtagande
$f(x)$	konkav	e^{-2}	konvex	odef	konvex

Vi ser att $-\frac{1}{2}$ är en inflektionspunkt.

Gränsvärden:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{1/x} = \lim_{y\to 0+} e^y = 1$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{1/x} = \lim_{y\to 0-} e^y = 1$$
$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} e^{1/x} = \lim_{y\to\infty} e^y = \infty$$
$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} e^{1/x} = \lim_{y\to-\infty} e^y = 0$$
$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{-1}{x^2}e^{1/x} = \lim_{y\to\infty} y^2e^y = -\infty$$
$$\lim_{x\to 0-} f'(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{-1}{x^2}e^{1/x} = \lim_{y\to-\infty} y^2e^y = 0$$

Vi ser att f är strängt avtagande och att värdemängden är $R_f = (0,1) \cap (1,\infty)$.

3. Enligt en sats kan vi beräkna Lipschitz-konstanten genom att ta maximum av $|f'(x)|$ över intervallet $[1,6]$. Enligt uppgift 2 har vi

$$|f'(x)| = \left|\frac{-1}{x^2}e^{1/x}\right| = \frac{1}{x^2}e^{1/x}$$

och

$$\frac{d}{dx}|f'(x)| = -\frac{1+2x}{x^4}e^{1/x} < 0 \quad \text{för } x > 0$$

så att $|f'(x)|$ är avtagande. Alltså inträffar maximum i vänstra ändpunkten:

$$L = \max|f'(x)| = |f'(1)| = e$$

4. Bilda $f(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$. Vi ska visa att $f(x) > 0$ för $x > 0$. Vi har

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2} > 0 \quad \text{för } x > 0$$

så att f är strängt växande för $x > 0$. Eftersom $f(0) = 0$ drar vi slutsatsen att $f(x) > 0$ för $x > 0$.

5. Vi måste visa att för varje $y \in R_f$ finns unikt $x \in D_f$ så att $y = f(x)$.
Vi har att f är kontinuerlig och $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ så att f är strängt växande. Dessutom har vi att $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ och $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Alltså: $D_f = R_f = (-\infty,\infty)$. Tag nu ett y. Då kan vi finna a och b sådana att $f(a) < y$ och $f(b) > y$. Satsen om mellanliggande värde på intervallet $[a,b]$ ger ett x så att $f(x) = y$. Eftersom f är strängt växande så är x unikt.
Vi använder formeln för derivata av invers funktion:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{där } y = f(x)$$

Eftersom $f(0) = 0$ och $f'(0) = 2$ får vi $(f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{2}$.

6. Gauss-eliminering ger

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 3 \\ 1 & -1 & 8 & | & -1 \\ 2 & 3 & 1 & | & 8 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & -2 & 6 & | & -4 \\ 0 & 1 & -3 & | & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & | & 1 \\ 0 & 1 & -3 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Lösning: $x = 1 - 5t,\ y = 2 + 3t,\ z = t$.

7. (a) Funktionen f är strängt växande i intervallet I om $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ medför att $f(x_1) < f(x_2)$.
I övrigt se boken.

För teknologer inskrivna H06 eller tidigare.

1. Som ovan utom (f) $\dfrac{2-\pi}{8}$.

2. Som ovan.

3. $\dfrac{5\sqrt{14}}{7}$

4–7. Som ovan.

`/stig`