Matematik Chalmers

Tentamen i TMV225 Inledande matematik M, 2010–08–25, f V

Telefon: Ida Säfström, 0703–088304
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Resultat meddelas per epost. Granskning: torsdag 9 september, 12–13, hos Stig Larsson.

---

1. Till denna uppgift ska du endast lämna in svar. (7×2 p $= 14$ p)

(a) Bestäm ekvationen för det plan, som går genom punkterna $(1, 1, 1)$, $(2, 2, 3)$ och $(1, 0, -3)$.

(b) Bestäm en ekvation på parameterform till skärningslinjen mellan planen $2x + y + z = 3$ och $x + y + 2z = 1$.

(c) Skriv ned Taylors polynom av grad 5 för $\ln(1 + x)$ kring $x = 0$.

(d) Beräkna vektorprojektionen av vektorn $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ på vektorn $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

(e) Bestäm gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}$.

(f) Skriv ned fixpunktsalgoritmen för ekvationer av typen $x = g(x)$ i form av en Matlab funktionsfil.

(g) Bestäm alla reella tal x som uppfyller $\left|\dfrac{1}{1+x} - 1\right| < \delta$ där δ är en liten tolerans (till exempel $0 < \delta < 1$).

2. Låt $f(x) = \exp(\frac{x}{1+x/4})$. Bestäm funktionens definitionsmängd och värdemängd. Skissa dess graf. Ange konkavitet och inflektionspunkter. (6 p)

3. Bestäm en Lipschitz-konstant till funktionen $f(x) = x^3 - 10x$ på intervallet $[0, 2]$. (6 p)

4. Visa att $\sin(x) \le x$ för $x \ge 0$. (6 p)

5. Beräkna avståndet mellan punkten $(1, 2, 0)$ och planet $3x - 4y - 5z = 2$. (6 p)

6. Använd Gauss eliminationsmetod för att lösa (6 p)

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 25 \\ x - 2y + 3z = 12 \\ 2x + 3y + z = 29 \end{cases}$$

7. (a) Formulera satsen om mellanliggande värden. (4 p)

(b) Bevisa den med hjälp av Bolzanos sats. (2 p)

/stig

TMV225 Inledande matematik M, 2010–08–25, f V. Lösningar.

---

1. (a) $-2x + 4y - z = 1$

(b) Vi löser ekv systemet

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - 3t \\ z = t \end{cases}$$

(c) $P_5(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$

(d) $\mathbf{u_v} = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} = \dfrac{32}{14}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = \dfrac{16}{7}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1} = \lim_{s\to 0}\frac{\ln(1+s)}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{s + O(s^2)}{s} = 1$

(f)

```
function x=fixpoint(g,x0,tol)
% fixpoint - fixed point iteration for the scalar equation x=g(x)

x1=x0;
x=g(x1);

while abs(x1-x)>tol
    x1=x;
    x=g(x1);
end
```

(g) $\dfrac{-\delta}{1+\delta} < x < \dfrac{\delta}{1-\delta}$ (obs: $1 - \delta > 0$)

2. Vi har

$$f(x) = \exp(\frac{x}{1 + x/4})$$
$$f'(x) = \frac{1}{(1 + x/4)^2}\exp(\frac{x}{1 + x/4})$$
$$f''(x) = \Big(\frac{-\frac{1}{2}}{(1 + x/4)^3} + \frac{1}{(1 + x/4)^4}\Big)\exp(\frac{x}{1 + x/4}) = \frac{1}{8}\frac{4 - x}{(1 + x/4)^4}\exp(\frac{x}{1 + x/4})$$

Definitionsmängd: $D_f = (-\infty, -4) \cap (-4, \infty)$. Inga singulära punkter ty $f'(x) > 0$. Andra derivatan: $f''(x) = 0$ endast i $x = 4$.

Teckentabell:

x		-4		4	
$f'(x)$	$+$	odef	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	odef	$+$	0	$-$
$f(x)$	växande	odef	växande	e^2	växande
$f(x)$	konvex	odef	konvex	e^2	konkav

Vi ser att 4 är en inflektionspunkt.

Gränsvärden:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = e$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = e$$
$$\lim_{x\to(-4)+} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\to(-4)-} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to(-4)+} f'(x) = 0$$
$$\lim_{x\to(-4)-} f'(x) = \infty$$

Vi ser att f att värdemängden är $R_f = (0, e) \cap (e, \infty)$.

3. Enligt en sats kan vi beräkna Lipschitz-konstanten genom att ta maximum av $|f'(x)|$ över intervallet $[0, 2]$. Vi har

$$|f'(x)| = \left|3x^2 - 10\right|$$

Denna funktion är kontinuerlig och har en singulär punkt $x = \sqrt{10/3}$ och inga kritiska punkter i intervallet $[0, 2]$. Lokala maxima inträffar i ändpunkterna eller i den singulära punkten. Vi ser att globalt maximum inträffar i vänstra ändpunkten:

$$L = \max |f'(x)| = |f'(0)| = 10$$

4. Bilda $f(x) = \sin(x) - x$. Vi ska visa att $f(x) \leq 0$ för $x \geq 0$. Vi har

$$f'(x) = \cos(x) - 1 \leq 0 \quad \text{för alla } x \text{ ty } \cos(x) \leq 1$$

så att f är avtagande för alla x. Eftersom $f(0) = 0$ drar vi slutsatsen att $f(x) \leq 0$ för $x \leq 0$.

5. $7\sqrt{2}/10$

6. Gauss-eliminering ger

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 4 \\ 0 & 1 & 0 & | & 5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 6 \end{bmatrix}$$

Lösning: $x = 4,\ y = 5,\ z = 6$.

7. Se kurslitteraturen.

`/stig`