MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen

Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa
Datum: 2011-08-24 kl. 8.30–12.30
Telefonvakt: Ida Säfström
Telefon: 0703 088 304

TMV225/176 Inledande Matematik M/TD

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

Betygsgränser: 3: 20-29 p, 4: 30-39, 5: 40-50.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Denna uppgift omfattar 8 p och finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. **Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar.**

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng**. Motivera och förklara så väl du kan.

2. (a) Beräkna vinkeln mellan planet som innehåller de tre punkterna $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ och $(0, 1, 1)$, och xy-planet. (3 p)

(b) En ljusstråle med riktningen $(-1, 2, 4)$ reflekteras i planet $2x - y + 3z = 6$. Vilken riktning har den reflekterade strålen? (3 p)

3. (a) Låt $f(x) = x + \arctan x$. Beräkna $(f^{-1})'(1 + \frac{\pi}{4})$. (2 p)

(b) Bestäm inversen till funktionen

$$f(x) = \frac{1 + e^x}{1 - e^x}.$$

Ange även den inversa funktionens definitionsmängd och värdemängd. (4 p)

4. (a) Låt $a > 0$ vara en konstant och $f(x) = \frac{1}{x} - ax$. Vilket är det minsta värde f antar på intervallet $0 < x \leq 1$? (3 p)

(b) Vilket är det största värde konstanten a kan anta så att $g(x) = x \ln x - \frac{ax^3}{6}$ är konvex på intervallet $0 < x \leq 1$? (3 p)

5. (a) Härled Newtons metod för lösning av ekvationen $f(x) = 0$ med hjälp av linjärisering. (3 p)

(b) Skriv en Matlab funktionsfil som implementerar Newtons metod fast med följande ändringar:

(i) stoppvillkoret byts ut mot villkoret att $|f(x)|$ ska vara mindre än den givna toleransen

(ii) i varje iterationssteg kontrolleras först om $|f'(x)| < 0.01$ innan man bildar kvoten $f(x)/f'(x)$. Om så är fallet avbryts programmet.

Du kan anta att programmet `derivative.m` från datorövning 6 är given. (3 p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera svaren. Rätt svar ger 1 p, inget svar 0 p och fel svar -1 p. Dock ej mindre än 0 p totalt.

(a) Om $f'(x) = g'(x)$ på ett intervall I, så är $f(x) = g(x)$+konstant på I.

(b) Om $f(x)$ och $g(x)$ är deriverbara och $f(x)g(x) = 1$ så är $\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)} = 0$.

(c) Om f är strängt växande på $\mathbb{R}$ så gäller att $f' > 0$ på $\mathbb{R}$.

(d) Om $f' > 0$ på $\mathbb{R}$ så är f strängt växande på $\mathbb{R}$.

(e) Om $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$ så gäller att $\lim_{x\to\infty} f(x)$ =konstant.

(f) Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är vinkelräta så gäller att $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$.

7. Formulera och bevisa medelvärdessatsen (eventuella hjälpsatser måste formuleras men behöver inte bevisas). (6 p)

8. (a) Skriv ned definitionen av att f är Lipschitz-kontinuerlig på ett intervall I. (1 p)

(b) Skriv ned definitionen av att $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ är en Cauchy-följd. (1 p)

(c) Låt f vara en deriverbar funktion på intervallet $(0, 2)$. Man vet att $f(0) = f(2) = 0$ och att det finns ett tal $c \in (0, 2)$ med $f(c) = 1$. Visa att det finns ett tal $s \in (0, 2)$, sådant att $|f'(s)| \geq 1$.
(Ledning: Använd medelvärdessatsen.) (4 p)

Lycka till!

Hossein och Stig

Anonym kod	**TMV225/176 Inledande Matematik M/TD 2011-08-24**	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm alla lösningar till ekvationssystemet (2 p)

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + 2y + 2z = 2 \\ -x + 4y + 8z = 1. \end{cases}$$

Lösning:

Svar: ....

(b) Lös olikheten $\frac{x^2-x}{x-3} < 0$. (2 p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Beräkna följande gränsvärden. (1+1 p)

(i) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+3}$

(ii) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\sin 3x}$

Lösning:

Svar: ....

(d) Beräkna $\cos(2 \arcsin \frac{1}{2})$. (2 p)

Lösning:

Svar: ....

Anonym kod	TMV225/176 Inledande Matematik M/TD 2011-08-24	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm alla lösningar till ekvationssystemet (2 p)

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + 2y + 2z = 2 \\ -x + 4y + 8z = 1. \end{cases}$$

Lösning: $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 8 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 8 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -5 & -3 \\ 0 & 6 & 10 & 3 \end{array}\right] \sim$

$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$

Svar: Lösning saknas

(b) Lös olikheten $\frac{x^2-x}{x-3} < 0$. (2 p)

Lösning: $\frac{x^2-x}{x-3} = \frac{x(x-1)}{x-3} < 0$

		0		1		3	
x	$---$		$+++$		$+++$		$+++$
$x-1$	$---$		$---$		$+++$		$+++$
$x-3$	$---$		$---$		$---$		$+++$
$\frac{x(x-1)}{x-3}$	$---$	0	$+++$	0	$---$	ej def.	$+++$

Svar: $x \in (-\infty, 0) \cup (1, 3)$

(c) Beräkna följande gränsvärden. (1+1 p)

(i) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+3}$

(ii) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\sin 3x}$

Lösning:

(i) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{x(2+\frac{3}{x})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(2+\frac{3}{x})} = -\frac{1}{2}$

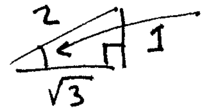
(ii) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \cdot \frac{1}{\sin 3x} \cdot \frac{3x}{3x} \cdot \frac{2x}{2x} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

Svar: (i) $-1/2$, (ii) $2/3$

(d) Beräkna $\cos(2 \arcsin \frac{1}{2})$. (2 p)

Lösning: $\cos(2\arcsin\frac{1}{2}) = \cos(\arcsin\frac{1}{2} + \arcsin\frac{1}{2}) =$

$= \cos^2(\arcsin\frac{1}{2}) - \sin^2(\arcsin\frac{1}{2}) = \{$ 

$\} =$

$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Svar: $1/2$

Lösningar omtentamen 2011-08-24

Inledande matematik

2 (a) Ta fram normalen till planet:

$$\mathbf{v}_1 = (1,1,0) - (1,0,1) = (0,1,-1)$$

$$\mathbf{v}_2 = (0,1,1) - (1,0,1) = (-1,1,0)$$

$$\mathbf{n}_1 = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1, 1, 1)$$

Normalen till xy-planet:

$$\mathbf{n}_2 = (0,0,1)$$

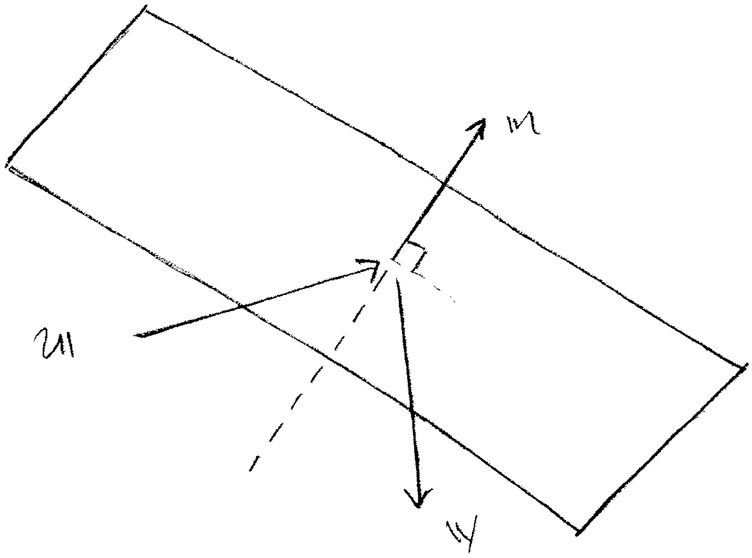
Vinkeln mellan planen = vinkeln mellan normalerna

$$\mathbf{n}_1 \bullet \mathbf{n}_2 = |\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2| \cos\theta \iff$$

$$\iff \cos\theta = \frac{\mathbf{n}_1 \bullet \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

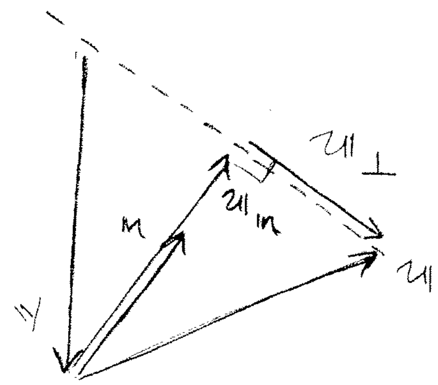
$$\therefore \theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

2 (b)



Givet: $u = (-1, 2, 4)$

$n = (2, -1, 3)$



Sökt: v

Ser att $v = -(u - 2u_\perp)$

$u_\perp = u - u_n$

$$u_n = \frac{u \cdot n}{|n|^2} n = \frac{4}{7}(2, -1, 3)$$

$$\Rightarrow u_\perp = (-1, 2, 4) - \frac{4}{7}(2, -1, 3) =$$

$$= \left(-\frac{15}{7}, \frac{18}{7}, \frac{16}{7}\right)$$

$$\Rightarrow v = 2u_\perp - u = \frac{1}{7}(-23, 22, 4)$$

$\therefore$ Utfallande stråle har riktning

$(-23, 22, 4)$

3. (a) $f(f^{-1}(x)) = x \Rightarrow f'(f^{-1}(x))\,(f^{-1})'(x) = 1$

$$\Leftrightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$f(x) = x + \arctan x \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{1}{1+x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow f$ strängt växande på $\mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ injektiv på $\mathbb{R}$

$f(1) = 1 + \arctan(1) = 1 + \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow f^{-1}\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$$f'(1) = 1 + \frac{1}{1+1^2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore (f^{-1})'\left(1+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(1+\frac{\pi}{4}\right)\right)} =$$

$$= \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}.$$

(b) $f(x) = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Om $y = f^{-1}(x)$ så $f(y) = f(f^{-1}(x)) = x$

$$\Rightarrow x = \frac{1+e^y}{1-e^y} \Leftrightarrow x(1-e^y) = 1+e^y$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = xe^y + e^y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = e^y(x+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^y = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow y = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$f^{-1}(x)$ väldefinierad om $\dfrac{x-1}{x+1} > 0$

Teckentabell:

		-1		1	
$x+1$	$- - -$	0	$+ + +$		$+ + +$
$x-1$	$- - -$		$- - -$	0	$+ + +$
$\dfrac{x-1}{x+1}$	$+ + +$	ej def.	$- - -$	0	$+ + +$

$$\Rightarrow D_{f^{-1}} = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

$$V_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

4 (a) $a > 0$, $f(x) = \frac{1}{x} - ax$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - a \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} - a = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = -\frac{1}{a}$ Saknar lösning då $a > 0$!

Men $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - a < 0 \quad \forall x \in (0,1]$

då $a > 0 \Rightarrow f$ strängt

avtagande på $(0,1] \Rightarrow$

$\Rightarrow f_{min} = f(1) = 1 - a.$

(b) g konvex på $(0,1]$ om $g''(x) \geq 0$ $\forall x \in (0,1]$

$g'(x) = \ln x + 1 - \frac{ax^2}{2}$

$g''(x) = \frac{1}{x} - ax$

$g''(x) \geq 0 \Leftrightarrow a \leq \frac{1}{x^2}$ då $x \in (0,1]$

Alltså är g konvex på $(0,1]$

om $a \leq \frac{1}{x^2} \quad \forall x \in (0,1]$

Minimum av $\frac{1}{x^2}$ på $(0,1]$ är 1

så då måste $a \leq 1$ ty annars är

$a \leq \frac{1}{x^2}$ ej uppfyllt för alla $x \in (0,1]$

$\therefore \quad a_{max} = 1.$

5 (a) Se BM

(b)

```
function x = newton(f, x0, tol)

x = x0;
while( abs(f(x)) > tol)
    a = derivative(f, x);
    if( abs(a) < 0.01)
        return;
    end
    b = -f(x);
    h = b/a;
    x = x + h;
end
```

6. (a) Sant

(b) Sant

(c) Falskt

(d) Sant

(e) Falskt

(f) Sant

7. Se kursbok

8. (a) Se BM

(b) Se BM

(c) <u>Bevis</u>: Två fall:

(i) $c \in (0,1]$: Vi använder MVS på intervallet $[0,c]$:

$$\Rightarrow \exists\, s \in (0,c) : \frac{\overset{1}{\overset{\shortparallel}{f(c)}} - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(0)}}}{c-0} = f'(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f'(s)| = \left|\frac{1}{c}\right| = \frac{1}{c} \geq 1 \quad \text{då } c \in (0,1]$$

(ii) $c \in (1,2)$: Vi använder MVS på intervallet $[c,2]$:

$$\Rightarrow \quad \exists\, s \in (c, 2) : \quad \frac{\overset{\overset{0}{\shortparallel}}{f(2)} - \overset{\overset{1}{\shortparallel}}{f(c)}}{2 - c} = f'(s) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |f'(s)| = \left| \frac{-1}{2-c} \right| = \frac{1}{2-c} > 1 \quad \text{då } c \in (1, 2)$$

Alltså gäller att $\exists\, s \in (0,2)$ s.a.

$$|f'(s)| \geq 1$$

oavsett om $c \in (0, 1]$ eller $c \in (1, 2)$, dvs för $c \in (0, 2)$. ∎