MATEMATIK | **Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2012-01-14 kl. 8.30–12.30
Tentamen | Telefonvakt: Adam Wojciechowski
Telefon: 0703 088 304

TMV225 Inledande Matematik M

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 3: 20-29 p, 4: 30-39, 5: 40-50.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Denna uppgift omfattar 8 p och finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. **Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar.**

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng**. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Låt $A = (0, 1, 1)$, $B = (-1, 3, 1)$ och $C = (-1, 5, 4)$.

(a) Beräkna arean av triangeln med hörn i A, B och C. (3 p)

(b) Bestäm skärningspunkten mellan linjen genom A och C och planet $4x+3y-2z = -3$. (3 p)

3. 1 km från en plats A går en flod med parallella stränder och bredden 100 m. 6 km längre ned längs floden floden ligger en annan plats B, fast på andra sidan och 2 km från floden. Nu vill man bygga en bro över floden så att färdsträckan mellan A och B via bron minimeras. Man antas röra sig rätlinjigt till och från bron. Var ska bron byggas? (6 p)

4. Beräkna följande gränsvärden (utan att använda l'Hospitals regel) (3+3 p)

(a) $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+1})$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin(3x)}$

5. (a) Skriv den funktionsfil `fixpoint.m` som du gjorde i datorövning 4 dvs givet en funktion `g`, en startpunkt `x0` och en tolerans `tol` implementeras fixpunktsalgoritmen på denna data. (2 p)

(b) För att beräkna kvadratroten ur ett tal i MATLAB används kommandot `sqrt`. Antag nu att `sqrt` inte finns. Då kan man använda sig av följande metod för att beräkna kvadratroten ur ett tal $x \geq 0$:

Man börjar med att gissa ett tal $x_0 \geq 0$. När vi har gissat x_0 vet vi att det måste finnas ett annat tal $\tilde{x}_0$ sådant att $x_0 \cdot \tilde{x}_0 = x$. Vi har alltså att $\tilde{x}_0 = x/x_0$. Om man har tur och har gissat riktigt bra så gäller att x_0 och x/x_0 är ungefär lika och då har man funnit lösningen dvs x_0 är en god approximation till $\sqrt{x}$. I normala fall gör man nog inte en så god gissning. En ny, bättre approximation x_1 kan man då få genom att bilda medelvärdet av x_0 och x/x_0, det vill säga

$$x_1 = \frac{x_0 + \frac{x}{x_0}}{2}.$$

Man kan nu ersätta x_0 med x_1 och sedan upprepa proceduren. På så sätt får man bättre och bättre approximationer till $\sqrt{x}$.

Skriv en MATLAB-funktionsfil `rot.m` som givet ett tal `x` och en tolerans `tol`, implementerar algoritmen ovan på denna data. Använd $x/2$ som första gissning och avbryt då skillnaden mellan två gissningar är mindre än `tol`. (4 p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera svaren. Rätt svar ger 1 p, inget svar 0 p och fel svar -1 p. Dock ej mindre än 0 p totalt.

(a) För alla vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ gäller att $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{w} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{u})$.

(b) Om $f(x)$ är deriverbar för alla $x \in (-1, 1)$ så existerar $\lim_{x \to 0} f(x)$.

(c) För alla reella tal a, b gäller att $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

(d) Om f är en injektiv funktion och g dess invers så gäller att $(f \circ g \circ f)(x) = f(x)$.

(e) Om f är en strängt växande, inverterbar funktion så är inversen f^{-1} strängt avtagande.

(f) För alla reella tal t gäller att $|e^{-it}| = 1$.

7. (a) Formulera kontraktionsavbildningssatsen och ange de fyra huvudstegen i beviset. (2 p)

(b) Visa att om en funktion f är deriverbar i en punkt $a \in D_f$ så är den även kontinuerlig i a och visa med ett motexempel att det omvända inte gäller. (4 p)

8. (a) Skriv ned definitionen av att f är kontinuerlig i en punkt a. (1 p)

(b) Skriv ned definitionen av att f är deriverbar i en punkt a. (1 p)

(c) Visa att funktionen $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 5$ har en rot i intervallet $[0, 1]$. Med hjälp av samma metod kan man komma fram till att funktionen $g(x) = \frac{1}{x}$ har en rot i intervallet $[-1, 1]$, vilket uppenbart är fel. Vad går snett? Motivera! (4 p)

Lycka till!

Hossein och Stig

Anonym kod	TMV225 Inledande Matematik M 2012-01-14	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Lös olikheten (svara med intervall) (2 p)

$$\frac{2x^2}{x+2} < x - 2.$$

Lösning:

Svar: ....

(b) Bestäm inversen till $f(x) = 2 + 3e^{-4x}$, $x \in \mathbb{R}$. (2 p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Lös ekvationen (2 p)

$$\ln(x+2) = \ln(x+1) + \ln(x).$$

Lösning:

Svar: ....

(d) Beräkna en Lipschitz-konstant till funktionen $f(x) = \arctan(\frac{1}{x})$ på $[1, \infty)$. (2 p)

Lösning:

Svar: ....

Anonym kod	TMV225/176 Inledande Matematik M/TD 2012-01-14	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Lös olikheten (svara med intervall) (2 p)

$$\frac{2x^2}{x+2} < x - 2.$$

Lösning: 1) $x > -2$: $\frac{2x^2}{x+2} < x-2 \Leftrightarrow 2x^2 < (x+2)(x-2)$ $x+2>0$

$\Leftrightarrow 2x^2 < x^2 - 4 \Leftrightarrow x^2 < -4$ falskt

2) $x < -2$: $\frac{2x^2}{x+2} < x-2 \Leftrightarrow 2x^2 > (x+2)(x-2)$ $x+2<0$

$\Leftrightarrow x^2 > -4$ sant

Svar: $x < -2$

(b) Bestäm inversen till $f(x) = 2 + 3e^{-4x}$, $x \in \mathbb{R}$. (2 p)

Lösning: Lös ut x ur ekvationen $y = 2 + 3e^{-4x}$.

$e^{-4x} = \frac{y-2}{3} \Leftrightarrow -4x = \ln\left(\frac{y-2}{3}\right)$ $(y > 2)$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}\ln\left(\frac{y-2}{3}\right) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{3}{y-2}\right)$

Svar: $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{3}{x-2}\right)$, $x > 2$

(c) Lös ekvationen (2 p)

$$\ln(x+2) = \ln(x+1) + \ln(x).$$

Lösning: $\ln(x+2) - \ln(x+1) - \ln(x) = 0$ $(x \neq -2, -1, 0)$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+2}{x(x+1)}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{x+2}{x(x+1)} = 1 \Leftrightarrow x + 2 = x^2 + x \Leftrightarrow x^2 = 2$

Svar: $x = \pm\sqrt{2}$

(d) Beräkna en Lipschitz-konstant till funktionen $f(x) = \arctan(\frac{1}{x})$ på ~~$\mathbb{R}$~~ $[1,\infty)$ (2 p)

Lösning: $f'(x) = \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{x^2+1}$

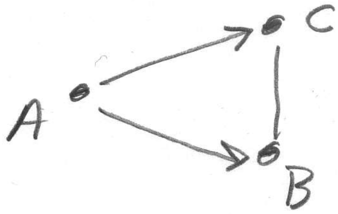
$|f'(x)| = \frac{1}{1+x^2} \leq 1$ för alla $x \in [1,\infty)$

Bättre: $|f'(x)| = \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$ för $x \in [1,\infty)$

Svar: $L_f = 1$ eller $L_f = 1/2$.

(1

9) $A=(0,1,1)$, $B=(-1,3,1)$, $C=(-1,5,4)$



a) Triangeln spänns upp av

$$\bar{v} = \overrightarrow{AC} = -1\bar{i} + 4\bar{j} + 3\bar{k}$$

$$\bar{w} = \overrightarrow{AB} = -1\bar{i} + 2\bar{j} + 0\bar{k}$$

$$\bar{v} \times \bar{w} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (4\cdot 0 - 2\cdot 3)\bar{i} - (-1\cdot 0 - 3\cdot(-1))\bar{j} + (-1\cdot 2 - 4\cdot(-1))\bar{k}$$

$$= -6\bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}$$

$$\text{Arean} = \tfrac{1}{2}|\bar{v} \times \bar{w}| = \tfrac{1}{2}\sqrt{36+9+4} = \tfrac{1}{2}\sqrt{49} = 3.5$$

b) En riktningsvektor för linjen genom AC är $\bar{v} = \overrightarrow{AC} = -1\bar{i} + 4\bar{j} + 3\bar{k}$.

Linjens ekvation: $\bar{r} = \overrightarrow{OA} + t\bar{v}$ dvs

$$\begin{cases} x = 0 - t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

Detta sätts in i planets ekvation:

$$4x + 3y - 2z = -3$$

$$4(-t) + 3(1+4t) - 2(1+3t) = -3$$

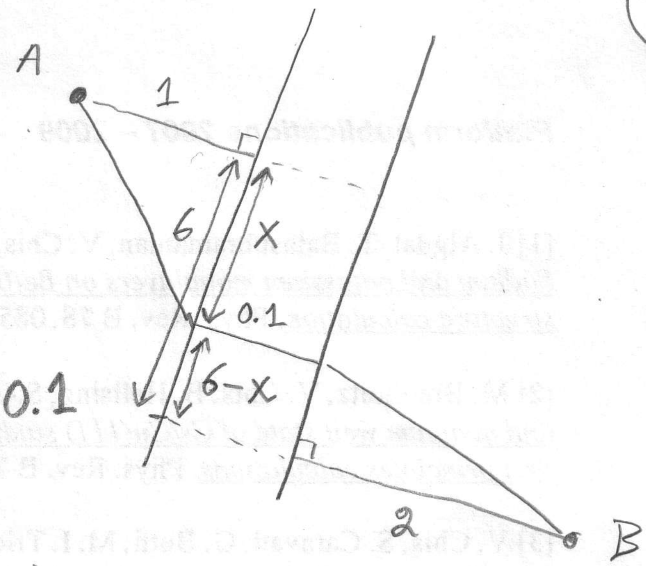
$$2t = -4$$

$$t = -2$$

I linjens ekvation: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - 8 = -7 \\ z = 1 - 6 = -5 \end{cases}$

Svar: $(2, -7, -5)$

3) $x=$ brons läge enligt figur



Vägsträckan är

$$s(x)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(6-x)^2+4}+0.1$$

Kritisk punkt ges av

$$s'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}+\frac{-2(6-x)}{2\sqrt{(6-x)^2+4}}=0$$

$$(1)\quad \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{6-x}{\sqrt{(6-x)^2+4}} \quad \text{kvadrera!}$$

$$(2)\quad \frac{x^2}{x^2+1}=\frac{(6-x)^2}{(6-x)^2+4}$$

$$\cancel{x^2(6-x)^2}+4x^2=\cancel{(6-x)^2x^2}+(6-x)^2$$

$$4x^2=36-12x+x^2$$

$$3x^2+12x-36=0$$

$$x^2+4x-12=0$$

$$(x+2)^2-4-12=0$$

$$(x+2)^2=16$$

$$x=-2\pm4=\begin{cases}-6\\2\end{cases}$$

$x=-6$ är en falsk rot, den uppfyller (2), men inte den ursprungliga ekv. (1).

s(0) s(3) > 0

x		2	
$s'(x)$	$-$	0	$+$
$s(x)$	↘		↗

Svar 2 km nedströms från A.

4) (a) Obs att $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ då $x < 0$.

$$\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2}\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}} - \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) =$$

$$= -x \frac{\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}} - \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{\sqrt{1+\frac{3}{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} =$$

$$= -x \frac{\left(1+\frac{3}{x}\right) - \left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{1+\frac{3}{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{-x\left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{1+\frac{3}{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} =$$

$$= \frac{-3 + \frac{1}{x}}{\sqrt{} + \sqrt{}} \rightarrow \frac{-3+0}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1+0}} = -\frac{3}{2}$$

då $x \to -\infty$ <u>Svar</u>: $-\frac{3}{2}$

(b) $$\frac{e^{2x}-1}{\sin(3x)} = \frac{1+2x+O(x^2)-1}{3x+O(x^3)} = \frac{2x+O(x^2)}{3x+O(x^3)} =$$

$$= \frac{2+O(x)}{3+O(x^2)} \rightarrow \frac{2+0}{3+0} = \frac{2}{3} \text{ då } x \to 0.$$

<u>Svar</u> $\frac{2}{3}$

4

5(a)

```
function x=fixpoint(g,x0,tol)
% fixpoint - fixed point iteration for the scalar equation x=g(x)
%
%   Syntax:
%           x = fixpoint(g,x0,tol)
%   Arguments:
%           g - function handle pointing to a function file
%           x0 - a real number, the initial approximation
%           tol - a tolerance
%   Returns:
%           x - a number, the approximate solution
%   Description:
%          The program fixpoint uses the fixed point iteration to
%          compute an approximate solution of the scalar equation
%          x=g(x).  The file g.m must contain the function y=g(x).
%          The function g:I->I must be a contraction on some
closed
%          interval I.  Then g has a unique fixed point x_exact in
I.
%          If the initial approximation x0 belongs to I, then the
%          program computes an approximate solution x with the
error
%          |x-x_exact| < tol/(1-L), where L is a Lipschitz
constant for g.
%   Examples:
%          x = fixpoint(@cos, 1, 1e-7) computes x=0.
739085169944554
%   See also:
%          bisect.m
%
%
-------------------------------------------------------------------
----

x1=x0;
x=g(x1);

while abs(x1-x)>tol
    x1=x;
    x=g(x1);
end
```

5(b)

```
function y=rot(x,tol)
% this function computes the square root of x

x0=x/2; % starting guess
e=1;    % faked value of the error to get started

while abs(e)>tol
    y=(x0+x/x0)/2;
    e=y-x0;
    x0=y;
end
```

6) S S S S F S

7) a) Antag, $g : I \to I$

, $|g(x) - g(y)| \leq L|x-y| \quad \forall x, y \in I$ med $L < 1$

Då finns unik $\bar{x} \in I$ sådan att $\bar{x} = g(\bar{x})$.

Fixpunkten fås som $\bar{x} = \lim_{k\to\infty} x_k$ där

$x_{k+1} = g(x_k)$ med godtycklig startpunk $x_0 \in I$.

Bevis (i) Bilda $x_{k+1} = g(x_k)$

(ii) Visa att x_k är Cauchy-följd

dvs att den bildar en decimal-

utveckling $\bar{x} = \lim_{k\to\infty} x_k$.

(iii) Visa att $\lim_{k\to\infty} g(x_k) = \bar{x}$,

dvs $g(\bar{x}) = \bar{x}$.

(iv) Visa att det finns bara en fixpunkt i I.

(b) $$f(x) - f(a) = \underbrace{(x-a)}_{\to 0} \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x-a}}_{\to f'(a) \text{ om } f'(a) \text{ existerar}} \to 0 \cdot f'(a) = 0 \text{ då } x \to a$$

Alltså: f är kontinuerlig i a om $f'(a)$ existerar.

Omvänt: $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$, $f'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

Här är f kontinuerlig i $a = 0$ men

$f'(0)$ existerar ej.

8 (a) f är kontinuerlig i a om $a \in D_f$ och $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

(b) f är deriverbar i a om gränsvärdet $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existerar.

(c) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 5$ är kontinuerlig.

$f(0) = -5 < 0$, $f(1) = 3 > 0$

Då finns minst en rot $\bar{x} \in [0, 1]$ enligt Bolzanos sats.

För funktionen $g(x) = \frac{1}{x}$ har vi $g(-1) = -1 < 0$, $g(1) = 1 > 0$ men den är ej kontinuerlig i $x = 0$.

Bolzanos sats kan ej användas på intervallet $[-1, 1]$

/Stig