MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Anders Logg
Telefonvakt: Anna Persson, tel. 0703-088304

TMV225 2014
2014–01–18 kl. 08.30–12.30 (V)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV225 Inledande matematik M

Tentamen

Tentamen består av 10 st uppgifter vardera värda 3p och 4 st uppgifter vardera värda 5p, vilket tillsammans ger maximala 50p. Till detta läggs de bonuspoäng (maximalt 6p) som tjänats ihop genom kursens tre duggor. Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet.

Till de första tio uppgifterna (3p-uppgifter) skall endast svar ges. Svar måste anges i rätt ruta på den bifogade svarsblanketten. Lämna ej in lösningar eller kladdpapper till dessa uppgifter!

Till de sista fyra uppgifterna (5p-uppgifter) skall utförliga, tydliga och välskrivna lösningar ges. Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Några tips och generella regler:

- Gör först de uppgifter som du tycker är lätta.
- Dubbelkolla dina svar på de uppgifter där endast svar skall lämnas.
- Alla svar skall ges på enklast möjliga form (förenkla).

Lycka till!

Anders

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Anders Logg
Telefonvakt: Anna Persson, tel. 0703-088304

TMV225 2014
2014–01–18 kl. 08.30–12.30 (V)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV225 Inledande matematik M

Tentamensuppgifter

Borde vara
Fel! $(\sin x)^2$!

1. Lös olikheten $|2x+1|/|2x-1| \leq 1$. (3p)

2. Bestäm värdet av $\tan(\cos^{-1}(0.5))$. (3p)

3. Bestäm (den bästa) Lipschitz-konstanten för funktionen $f(x) = \sin(x^2)$ på intervallet $[-\pi, \pi]$. (3p)

4. Skriv en MATLAB-funktion som implementerar funktionen $f(x) = \sin(|x|)$, utan att använda MATLABs inbyggda abs-funktion. (3p)

← Fel! Skall vara $\frac{x+1}{x-1}$

5. Låt $f(x) = (x+1)(x-1)$. Bestäm $(f^{-1})'(2)$. (3p)

6. Bestäm alla kritiska punkter till funktionen $f(x) = x + \cos x$. (3p)

7. Bestäm gränsvärdet $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}$. Fel! Borde vara $x \to 1+$! (3p)

8. Bestäm lineariseringen av $f(x) = \exp(1 + \ln x)$ runt $x = 1$. (3p)

9. Bestäm en formel för Maclaurin-utvecklingen av $f(x) = \sin(2x)$. (3p)

10. Bestäm konvergensradien för serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^3} \left(\frac{2x+1}{3}\right)^n$. (3p)

---

11. Skriv ett program som utför fixpunktsiterationen $x_n = g(x_{n-1})$ för $g(x) = x - \sin(\frac{x}{4}) + \cos(\frac{x}{4})$ för $x_0 = 3$. Fixpunkten skall bestämmas med (ca) 10 decimalers noggrannhet. (3p)
Ange fixpunkten. (2p) (5p)

12. Formulera Bolzanos sats. (1p) (5p)

Beskriv de olika stegen i beviset av Bolzanos sats (1p) och genomför beviset (3p).

Bisektionsalgoritmen behöver endast beskrivas kortfattat!

13. Utred surjektivitet, injektivitet, bijektivitet och existens av invers för funktionen $f : X \to Y$ då $f(x) = x^2$ för $X = \mathbb{R}$, $X = [0, \infty)$, $Y = \mathbb{R}$, $Y = [0, \infty)$ (fyra kombinationer). (5p)

14. För en kontinuerlig funktion f kan man definiera den så kallade *interpolanten* $\pi_h f$ av f på intervallet $[a, b]$ som (5p)

$$\pi_h f(x) = f(a)\lambda_a(x) + f(b)\lambda_b(x),$$

där $\lambda_a(x) = \frac{b-x}{b-a}$ och $\lambda_b(x) = \frac{x-a}{b-a}$.

(a) Bestäm (den bästa) Lipschitz-konstanten för funktionen $\pi_h f$ på intervallet $[a, b]$. (2,5p)

(b) Bestäm största värdet av funktionen $\pi_h f$ på intervallet $[a, b]$. (2,5p)

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Anders Logg
Telefonvakt: Anna Persson, tel. 0703-088304

TMV225 2014
2014–01–18 kl. 08.30–12.30 (V)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV225 Inledande matematik M

Svar till tentamensuppgifter 1–10

Tentamenskod: ....

Uppgift	Svar	Poäng
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

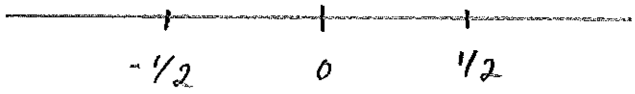
TMV 225/176 Omtenta 2014-01-18

1. $|2x+1|/|2x-1| \le 1, \quad x \ne 1/2$

$$|2x+1| \le |2x-1|$$

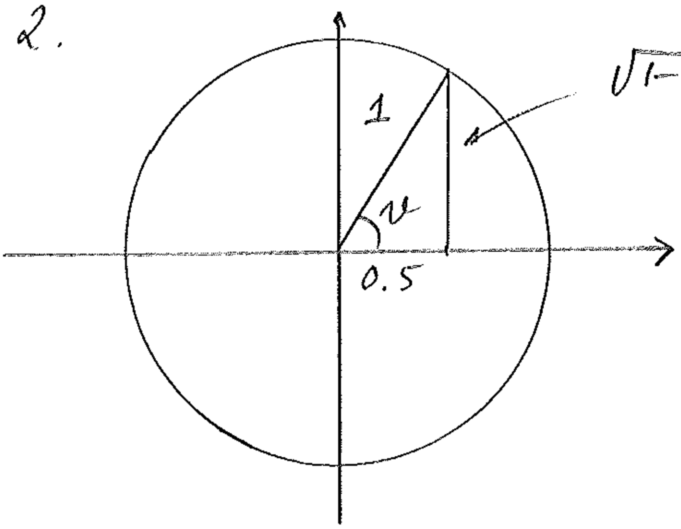
$$|x+\tfrac{1}{2}| \le |x-\tfrac{1}{2}|$$

$$|x-(-\tfrac{1}{2})| \le |x-\tfrac{1}{2}| \iff \text{närmare } x=-\tfrac{1}{2} \text{ än } x=\tfrac{1}{2}$$



Svar: $\underline{\underline{x \le 0}}$

2.



$$\sqrt{1-0.5^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

Svar: $\underline{\underline{\sqrt{3}}}$

---

3. $f(x) = (\sin(x))^2 \Rightarrow f'(x) = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$

$$\max_{[-\pi,\pi]} |\sin 2x| = 1 \Rightarrow L_f = 1$$

Notera: Tryckfel i tentamenstesen: skall ej vara $f(x) = \sin(x^2)$, vilket gör uppgiften betydligt svårare och kräver numerisk lösning!

$\Rightarrow$ Uppgiften utgår = 3p till alla

4.

```
function y = funk(x)
if x >= 0
    y = sin(x);
else
    y = sin(-x);
end
```

5.

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{\cancel{x}-1-(\cancel{x}+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$y = f(x) = 2 \Leftrightarrow 2 = \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow 2\cancel{x} - 2 = \cancel{x} + 1$$
$$\Leftrightarrow x = 3$$

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(3)} = \frac{1}{\frac{-2}{(3-1)^2}} = \frac{4}{-2} = -2$$

Svar: $\underline{\underline{-2}}$

Notera tryckfel i tentamenstesen: "/" saknas.
$f(x) = (x+1)(x-1) = x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = 2x$
$y = 2 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow (f^{-1})'(2) = \pm\frac{1}{2\sqrt{3}}$.
Full poäng ges för $1/2\sqrt{3}$, $-1/2\sqrt{3}$, $\pm 1/2\sqrt{3}$ och "invers saknas"

6.

$$f(x) = x + \cos x \Rightarrow f'(x) = 1 - \sin x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$$

Svar: $\underline{\underline{x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}}$

7.

$$\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\cancel{\sqrt{x-1}}}{\cancel{\sqrt{x-1}} \cdot \sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ då } x \to 1$$

Svar: $\underline{\underline{1/\sqrt{2}}}$

Notera tryckfel i tentamenstesen: Skall vara ensidigt gränsvärde $x \to 1+$.
Full poäng ges därför också för svaret "gränsvärdet existerar inte".

8. $f(x) = \exp(1 + \ln x)$

$\Rightarrow f'(x) = \exp(1 + \ln x) \cdot \frac{1}{x}$

$\Rightarrow f'(1) = \exp(1 + \ln 1) \cdot \frac{1}{1} = \exp(1) = e$

$f(1) = \exp(1 + \ln 1) = e$

$\Rightarrow f(x) \approx e + e \cdot (x-1) = \cancel{e} + ex - \cancel{e} = ex$

Svar: $\underline{\underline{ex}}$

---

9. $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

$\Rightarrow \sin 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot (2x)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

Svar: $\underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}}}$

---

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^3} \cdot \left(\frac{2x+1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{2^{n+1} \cdot 2^n}{n^3 \cdot 3^n}}_{=a_n} \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)^n$, $\quad 2^{n+1} \cdot 2^n = 2^{2n+1}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2^{2(n+1)+1} / ((n+1)^3 \cdot 3^{n+1})}{2^{2n+1} / (n^3 \cdot 3^n)}$$

$$= \frac{2^{\cancel{2n}+2+\cancel{1}-\cancel{2n}-\cancel{1}} \cdot n^3 \cdot \cancel{3^n}}{(n+1)^3 \cdot 3^{\cancel{n}+1}} = \frac{4 \cdot n^3}{(n+1)^3 \cdot 3} \to \frac{4}{3} = L$$

då $n \to \infty$

$\Rightarrow R = 1/L = 3/4$

Svar: $\underline{\underline{R = 3/4}}$

11. Program

```
x = 3;
tol = 1e-10;
dx = 2*tol;
while abs(dx) > tol
    x_new = x - sin(x/4) + cos(x/4)
    dx = x_new - x;
    x = x_new;
end
```

Fixpunkt

$$x = g(x)$$

$$\cancel{x} = \cancel{x} - \sin(x/4) + \cos(x/4)$$

$$\sin(x/4) = \cos(x/4)$$

$$x/4 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$x = \pi (+ 8\pi n)$$

Man kan visa (med Banachs fixpunktssats) att lösningen konvergerar mot π i närheten av $x_0 = 3$.

Svar: $\underline{\underline{x = \pi}}$

12. Se föreläsning F12!

13. Se föreläsning F27!

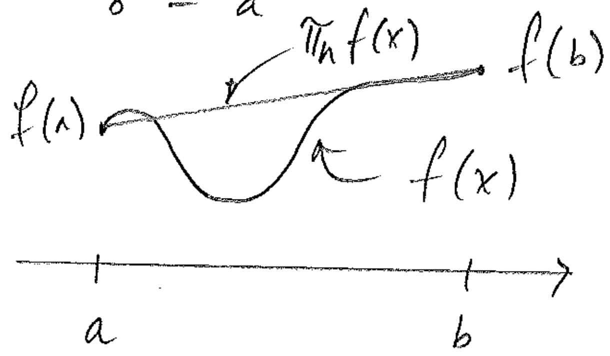
14. a)

$$\frac{d}{dx}\Pi_h f(x) = \frac{d}{dx}\left(f(a)\lambda_a(x) + f(b)\lambda_b(x)\right)$$

$$= f(a)\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{b-x}{b-a}\right) + f(b)\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$$

$$= f(a)\cdot\left(\frac{-1}{b-a}\right) + f(b)\cdot\left(\frac{1}{b-a}\right)$$

$$= \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad (\text{konstant})$$



$$\Rightarrow L_f = \max|f'| = \frac{|f(b)-f(a)|}{b-a}$$

Svar: $\underline{\underline{\dfrac{|f(b)-f(a)|}{b-a}}}$

b) Derivatan konstant $\Rightarrow$ maximum antas i någon ändpunkt.

$\therefore$ Svar: $\underline{\underline{\max(f(a), f(b))}}$