MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Anders Logg
Telefonvakt: Tim Cardilin, tel. 0703–088304

TMV225 2014
2015–01–05 kl. 08.30–12.30 (V)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV225 Inledande matematik M

Tentamen

Tentamen består av 10 st uppgifter vardera värda 3p och 4 st uppgifter vardera värda 5p, vilket tillsammans ger maximala 50p. Till detta läggs de bonuspoäng (maximalt 7p) som tjänats ihop genom kursens tre duggor. Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet.

Till de första tio uppgifterna (3p-uppgifter) skall endast svar ges. Svar måste anges i rätt ruta på den bifogade svarsblanketten. Lämna ej in lösningar eller kladdpapper till dessa uppgifter!

Till de sista fyra uppgifterna (5p-uppgifter) skall utförliga, tydliga och välskrivna lösningar ges. Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Några tips och generella regler:

- Gör först de uppgifter som du tycker är lätta.
- Dubbelkolla dina svar på de uppgifter där endast svar skall lämnas.
- Alla svar skall ges på enklast möjliga form (förenkla).

Lycka till!

Anders

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Anders Logg
Telefonvakt: Tim Cardilin, tel. 0703–088304

TMV225 2014
2015–01–05 kl. 08.30–12.30 (V)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV225 Inledande matematik M

Tentamensuppgifter

---

1. Lös olikheten $|3x+1|/|3x-1| \leq 2$. (3p)

2. Bestäm värdet av $\tan(\sin^{-1}(0.5))$. (3p)

3. Bestäm (den minsta möjliga) Lipschitz-konstanten för funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ på intervallet $I = [1, 2]$. (3p)

4. Skriv en MATLAB-funktion som implementerar numerisk derivata av en funktion `f` i en punkt `x` med steglängd `h` (argument `f, x, h`). (3p)

5. Bestäm inversen till funktionen $f(x) = \frac{2+x}{2-x}$. (3p)

6. Bestäm alla kritiska punkter till funktionen $f(x) = \sqrt{3} \cdot x + 2\sin x$. (3p)

7. Bestäm en formel för Maclaurin-utvecklingen av $f(x) = 1/(1-x^{10})$. (3p)
Ledning: Geometrisk summa.

8. Bestäm definitionsmängden för funktionen $f(x) = \ln(\pi - \exp(3/x))$. (3p)

9. Bestäm derivatan av $f(x) = \ln(\sin(\exp(x)))$ i punkten $x = \ln(\pi/3)$. (3p)

10. Bestäm konvergensradien för serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3} \left(\frac{3x-1}{10}\right)^n$. (3p)

---

11. Skriv ett program som löser ekvationen $x^2 = 2$ med Newtons metod med ca 10 decimalers noggrannhet. (5p)

12. Formulera satsen om derivatan av en kvot. (1p) (5p)

Genomför beviset (4p).

13. Visa att om $\lim_{i\to\infty} x_i = \bar{x}$ så är $\{x_i\}$ en Cauchy-följd. (5p)

14. Låt f och g vara Lipschitz-kontinuerliga funktioner på intervallet $[a, b]$ med Lipschitz-konstanter L_f, L_g och begränsade av M_f, M_g. Bestäm en Lipschitz-konstant för funktionen $h = f^2 g + f g^2$. (5p)

TMV225 Inledande matematik M

Svar till tentamensuppgifter 1–10

Tentamenskod: ....

Uppgift	Svar	Poäng
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

TMV 225 Tenta 2015-01-05

1.

$$|3x+1| / |3x-1| \leq 2$$

Fall 1: $3x+1 \geq 0, \quad 3x-1 > 0 \iff x > 1/3$

$$3x+1 \leq 2\cdot(3x-1) = 6x-2$$

$$3 \leq 3x$$

$$1 \leq x$$

Fall 2: $3x+1 \geq 0, \quad 3x-1 < 0 \iff -1/3 \leq x < 1/3$

$$3x+1 \leq 2\cdot(1-3x) = 2-6x$$

$$9x \leq 1$$

$$x \leq 1/9$$

$$\therefore \; -1/3 \leq x \leq 1/9$$

(Fall 3: $3x+1 < 0, \quad 3x-1 > 0 \iff x < -1/3 \wedge x > 1/3$ ↯)

Fall 4: $3x+1 < 0, \quad 3x-1 < 0 \iff x < -1/3$

$$-(3x+1) \leq 2\cdot(1-3x) = 2-6x$$

$$3x \leq 3$$

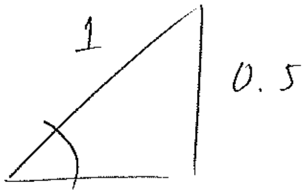
$$x \leq 1$$

$$\therefore \; x < -1/3$$

$\therefore$ Svar: $\underline{\underline{(-\infty, 1/9] \cup [1, \infty)}}$

2.

$$\tan(\sin^{-1} 0.5) = \frac{0.5}{\sqrt{3}/2} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{3}}}}$$



$$\sqrt{1-0.5^2} = \sqrt{0.75} = \sqrt{3}/2$$

3.

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow L_f = \max |f'| = \max_{x \in [1,2]} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

4.

```
function y= derivata(f,x,h)
y=(f(x+h)- f(x))/h;
```

5.

$$f(x) = \frac{2+x}{2-x} = y$$

$$2 + x = y \cdot (2-x) = 2y - yx$$

$$x + yx = 2y - 2 = 2 \cdot (y-1)$$

$$(1+y) \cdot x = 2 \cdot (y-1)$$

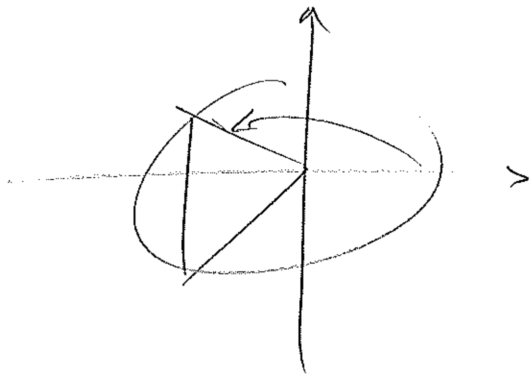
$$x = 2 \cdot \frac{y-1}{y+1}$$

$\therefore$ Svar: $\underline{\underline{f^{-1}(y) = 2 \cdot \frac{y-1}{y+1}}}$

6.

$$f(x) = \sqrt{3} \cdot x + 2 \sin x$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \sqrt{3} + 2 \cos x$$



$$\sqrt{3} + 2 \cos x = 0$$

$$\cos x = -\sqrt{3}/2$$

$$\underline{\underline{x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n}}$$

---

7. Låt $y = x^{10}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{1-x^{10}} = \frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} y^n = \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} x^{10n}}}$$

8.

$$f(x) = \ln(\underbrace{\pi - \exp(\underbrace{3/x}_{x \neq 0})}_{})$$

$$y = \pi - \exp(3/x) > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \exp(3/x) < \pi$$

$$\Leftrightarrow \quad 3/x < \ln \pi$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 3/\ln \pi, & x > 0 \\ x < 3/\ln \pi, & x < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x > 3/\ln \pi \text{ eller } x < 0}}$$

9.

$$f(x) = \ln(\sin(\exp(x)))$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\sin(\exp(x))} \cdot \cos(\exp(x)) \cdot \exp(x)$$

$$\Rightarrow \quad f'(\ln(\pi/3)) = \frac{1}{\sin(\pi/3)} \cdot \cos(\pi/3) \cdot \pi/3$$

$$= \frac{1/\cancel{2}}{\sqrt{3}/\cancel{2}} \cdot \pi/3 = \underline{\underline{\frac{\pi}{3\sqrt{3}}}}$$

10.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3}\left(\frac{3x-1}{10}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3 \cdot 10^n} \cdot 3^n \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{3^{2n}}{n^3 \cdot 10^n}}_{a_n} \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right)^n$$

(Efterkonstruktion för att maskera ett pinsamt slarvfel... :-)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{3^{2n}/(n^3 \cdot 10^n)}{3^{2(n+1)}/((n+1)^3 \cdot 10^{n+1})}\right)^{-1}$$

$$= \left(3^{\cancel{2n} - \cancel{2n} - 2} \cdot \frac{(n+1)^3 \cdot 10^{n+1}}{n^3 \cdot \cancel{10^n}}\right)^{-1}$$

$$= \left(\frac{1}{9} \cdot 10 \cdot \frac{(n+1)^3}{n^3}\right)^{-1} \longrightarrow \left(\frac{10}{9}\right)^{-1} \text{ då } n \to \infty$$

$$\therefore \quad \underline{\underline{R = \left(\frac{9}{10}\right)^{-1}}} = \underline{\underline{\frac{10}{9}}}$$

11.

```
x = 1;
tol = 1e-10;
dx = 2 * tol;
while abs(dx) > tol
    dx = (x + 2/x)/2 - x;
    x = x + dx;
end
```

12. Se föreläsning F16!

13. Betrakta $|x_i - x_j|$:

$$|x_i - x_j| = |x_i - \bar{x} + \bar{x} - x_j| \leq \underbrace{|x_i - \bar{x}|}_{< \varepsilon/2} + \underbrace{|\bar{x} - x_j|}_{< \varepsilon/2}$$

ty $x_i \to \bar{x}$ och vi kan därmed välja N s.a. $|x_i - \bar{x}| < \varepsilon/2$ för $i \geq N$

$$= \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

$$\therefore \forall \varepsilon > 0 \ \exists N : i, j \geq N \Rightarrow |x_i - x_j| < \varepsilon$$

$\blacksquare$

14.

$$h = f^2 g + f g^2 = f \cdot (fg) + g \cdot (fg)$$

$$M(fg) = M_f \cdot M_g \equiv M_{fg}$$

$$L(fg) = M_f L_g + L_f M_g = L_{fg}$$

$$\Rightarrow \quad L_h = L(f \cdot (fg)) + L(g \cdot (fg))$$

$$= M_f L_{fg} + L_f M_{fg} + M_g L_{fg} + L_g M_{fg}$$

$$= M_f (M_f L_g + L_f M_g)$$

$$+ L_f M_f M_g$$

$$+ M_g (M_f L_g + L_f M_g)$$

$$+ L_g M_f M_g$$

$$= M_f^2 L_g + \underline{M_f M_g L_f} + \underline{M_f M_g L_f}$$

$$+ \underline{M_f M_g L_g} + M_g^2 L_f + \underline{M_f M_g L_g}$$

$$= 2 M_f M_g (L_f + L_g) + M_f^2 L_g + M_g^2 L_f$$

$$\Big(= L_f \cdot (2 M_f M_g + M_g^2) + L_g \cdot (2 M_f M_g + M_f^2)$$

$$= L_f M_g \cdot (2 M_f + M_g) + L_g M_f \cdot (M_f + 2 M_g) \Big)$$