MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Anders Logg
Telefonvakt: Anna Persson, tel. 0703–088304

TMV225 / TMV176 2015
2015–08–26 kl. 08.30–12.30 (V)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV225 / TMV176 Inledande matematik M / TD

Tentamen

Tentamen består av 10 st uppgifter vardera värda 3p och 4 st uppgifter vardera värda 5p, vilket tillsammans ger maximala 50p. Till detta läggs de bonuspoäng (maximalt 7p) som tjänats ihop genom kursens tre duggor. Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet.

Till de första tio uppgifterna (3p-uppgifter) skall endast svar ges. Svar måste anges i rätt ruta på den bifogade svarsblanketten. Lämna ej in lösningar eller kladdpapper till dessa uppgifter!

Till de sista fyra uppgifterna (5p-uppgifter) skall utförliga, tydliga och välskrivna lösningar ges. Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Några tips och generella regler:

- Gör först de uppgifter som du tycker är lätta.
- Dubbelkolla dina svar på de uppgifter där endast svar skall lämnas.
- Alla svar skall ges på enklast möjliga form (förenkla).

Lycka till!

Anders

TMV225 / TMV176 Inledande matematik M / TD

Tentamensuppgifter

---

1. Lös olikheten $|3x - 3| < 5x$. (3p)

2. Bestäm största värdet för funktionen $f(x) = 3\pi x + 6\sin(\pi x)$ på intervallet $[0, 1]$. (3p)

3. Bestäm (den bästa) Lipschitz-konstanten för funktionen $f(x) = 2\sin(3x)\cos(3x)$. (3p)

4. Skriv en MATLAB-funktion som implementerar funktionen $f(x) = |-x|$, utan att använda MATLABs inbyggda `abs`-funktion. (3p)

5. Bestäm inversen till funktionen $f(x) = \frac{1+2x}{1-2x}$. (3p)

6. Bestäm alla kritiska punkter till funktionen $f(x) = 100x + 200\sin x$. (3p)

7. Bestäm gränsvärdet $\lim_{x\to\infty}(1 + \frac{2}{3x})^x$. *Ledning: logaritmera!* (3p)

8. Bestäm definitionsmängden för funktionen $f(x) = \ln(2\pi - \exp(3/x))$. (3p)

9. Bestäm en formel för Maclaurin-utvecklingen av $f(x) = 2\sin(x^3)$. (3p)

10. Bestäm konvergensradien för serien $\frac{1}{4}x + \frac{4}{9}x^2 + \frac{9}{16}x^3 + \frac{16}{25}x^4 \ldots$. (3p)

---

11. Skriv ett program som löser ekvationen $x^3 = 2$ för $x > 0$ med Newtons metod med (ca) 10 decimalers noggrannhet. (5p)

12. Formulera Banachs fixpunktssats. (1p) (5p)

Beskriv de olika stegen i beviset av Banachs fixpunktssats (1p) och genomför beviset (3p).

Formulera (men bevisa ej) eventuella lemman!

13. Utred surjektivitet, injektivitet, bijektivitet och existens av invers för funktionen $f : X \to Y$ då $f(x) = x^4$ för $X = \mathbb{R}$, $X = [0, \infty)$, $Y = \mathbb{R}$, $Y = [0, \infty)$ (fyra kombinationer). (5p)

14. Låt f och g vara Lipschitz-kontinuerliga funktioner på intervallet $[a, b]$ med Lipschitz-konstanter L_f, L_g och begränsade av M_f, M_g. Bestäm en Lipschitz-konstant för funktionen $h = f^2g - fg^2$. (5p)

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Anders Logg
Telefonvakt: Anna Persson, tel. 0703–088304

TMV225 / TMV176 2015
2015–08–26 kl. 08.30–12.30 (V)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV225 / TMV176 Inledande matematik M / TD

Svar till tentamensuppgifter 1–10

Tentamenskod: ....

Uppgift	Svar	Poäng
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

TMV225 Tenta 2015-08-26

1. $|3x-3| < 5x$

Fall 1: $3x-3 \geq 0$

$\Leftrightarrow$

$x \geq 1$,

$3x-3 < 5x$

$-3 < 2x$

$x > -3/2$

$\therefore \quad x \geq 1$

Fall 2: $3x-3 < 0$

$\Leftrightarrow$

$x < 1$

$-(3x-3) < 5x$

$-3x+3 < 5x$

$3 < 8x$

$x > 3/8$

$\therefore \quad 3/8 < x < 1$

$$\Rightarrow \quad x \in (3/8, 1) \cup [1, \infty) = (3/8, \infty)$$

Svar: $\underline{x > 3/8}$

---

2. $f(x) = 3\pi x + 6\sin(\pi x), \quad x \in [0,1]$

Extrempunkter: $f'(x) = 0$

$0 = f'(x) = 3\pi + 6\pi\cos(\pi x)$

$0 = 1 + 2\cos(\pi x)$

$\cos \pi x = -1/2$

$\pi x = \pm 2\pi/3 + 2\pi n$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = 3\pi \cdot \frac{2}{3} + 6\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$= 2\pi + \cancel{6}^{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}_{1}}$

$= \underline{2\pi + 3\sqrt{3}}$

$x = \pm 2/3 + 2n \in [0,1]$ för $n=0$

Ändpunkter:

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = 3\pi + 6 \cdot \sin \pi = 3\pi + 0 = 3\pi < 2\pi + 3\sqrt{3}$$

$\therefore$ Svar: $\underline{2\pi + 3\sqrt{3}}$

3.

$$f(x) = 2\sin(3x) \cdot \cos(3x)$$

$$= \sin(6x)$$

$$f'(x) = 6\cos(6x)$$

$$L_f = \max |f'| = \underline{\underline{6}}$$

$\therefore$ Svar: $\underline{L_f = 6}$

4.

```
function y = myfunc(x)
if -x >= 0
    y = -x;
else
    y = x;
end
```

```
if x >= 0
    y = x
else
    y = -x
end
```

funkar också!

5.

$$y = \frac{1+2x}{1-2x}$$

$$y \cdot (1-2x) = 1+2x$$

$$y - 2xy = 1+2x$$

$$y - 1 = 2xy + 2x = x \cdot (2y+2)$$

$$x = \frac{y-1}{2y+2}$$

$\therefore$ Svar: $\underline{\underline{f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2x+2}}}$

6.

$$f(x) = 100x + 200\sin x$$

$$f'(x) = 100 + 200\cos x$$

$$100 + 200\cos x = 0$$

$$1 + 2\cos x = 0$$

$$\cos x = -1/2$$

$$x = \pm 2\pi/3 + 2\pi n$$

$\therefore$ Svar: $\underline{\underline{x = \pm 2\pi/3 + 2\pi n, \; n \in \mathbb{Z}}}$

7.

$$\left(1+\frac{2}{3x}\right)^x = \exp\left(\ln\left(1+\frac{2}{3x}\right)^x\right)$$

$$= \exp\left(x \ln\left(1+\frac{2}{3x}\right)\right)$$

$$= \exp\left(x \cdot \left(\frac{2}{3x} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)\right)\right)$$

$$= \exp\left(\frac{2}{3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \to \exp\left(\frac{2}{3}\right)$$

då $x \to \infty$.

$\therefore$ Svar: $\underline{\underline{e^{2/3}}}$

8.

$$f(x) = \ln(\underbrace{2\pi - \exp(3/x)}_{>0})$$

$2\pi - \exp(3/x) > 0$

$\exp(3/x) < 2\pi$

$3/x < \ln 2\pi$

$x > 3/\ln(2\pi)$

$\therefore$ Svar: $\underline{\underline{x > \frac{3}{\ln(2\pi)}}}$

9.

$$2\sin(x^3) = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (x^3)^{2n+1}$$

$$= \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{(2n+1)!} x^{6n+3}}}$$

10.

$$\frac{1}{4}x + \frac{4}{9}x^2 + \frac{9}{16}x^3 + \frac{16}{25}x^4$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$a_n = \frac{n^2}{(n+1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2/(n+1+1)^2}{n^2/(n+1)^2} =$$

$$= \frac{(n+1)^2 \cdot (n+1)^2}{n^2 \cdot (n+2)^2} \longrightarrow 1 = L$$

då $n \to \infty$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{L} = \frac{1}{1} = 1$$

$\therefore$ Svar: $\underline{\underline{R=1}}$

11.

```
x = 1;
tol = 1e-10;
dx = 2*tol;
while abs(dx) > tol
    dx = -(x^3-2)/(3*x^2);
    x = x + dx
end
```

$F(x) = x^3 - 2$

$F(x)$

$F'(x)$

---

12. Se föreläsningsanteckningar

13.

$\begin{cases} X = \mathbb{R} \\ Y = \mathbb{R} \end{cases}$ ej surjektiv, ej injektiv $\Rightarrow$ ej bijektiv

$\begin{cases} X = \mathbb{R} \\ Y = [0, \infty) \end{cases}$ surjektiv, ej injektiv $\Rightarrow$ ej bijektiv

$\begin{cases} X = [0, \infty) \\ Y = \mathbb{R} \end{cases}$ ej surjektiv, injektiv $\Rightarrow$ ej bijektiv

$\begin{cases} X = [0, \infty) \\ Y = [0, \infty) \end{cases}$ surjektiv, injektiv $\Rightarrow$ bijektiv, f^{-1} existerar

14.

$$h = f^2 g - f g^2$$

$$L(f^2) = L_f M_f + M_f L_f = 2 M_f L_f$$

$$L(g^2) = 2 M_g L_g$$

$$L(f^2 g) = L_{f^2} M_g + M_{f^2} L_g$$

$$= 2 M_f L_f M_g + M_f^2 L_g$$

$$L(f g^2) = 2 M_g L_g M_f + M_g^2 L_f$$

$$L(f^2 g - f g^2) = L(f^2 g) + L(f g^2)$$

$$= 2 M_f L_f M_g + M_f^2 L_g + 2 M_g L_g M_f + M_g^2 L_f$$

$$= 2 M_f M_g (L_f + L_g) + M_f^2 L_g + M_g^2 L_f$$