MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Anders Logg
Telefonvakt: Carl Lundholm, tel. 0703-088304

TMV225 / TMV176 2015
2015–10–30 kl. 14.00–18.00 (V)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV225 / TMV176 Inledande matematik M / TD

Tentamen

Tentamen består av 10 st uppgifter vardera värda 3p och 4 st uppgifter vardera värda 5p, vilka tillsammans ger maximalt 50p. Till detta läggs de bonuspoäng (maximalt 7p) som tjänats ihop genom kursens tre duggor. Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet.

Till de första tio uppgifterna (3p-uppgifter) skall endast svar ges. Svar måste anges i rätt ruta på den bifogade svarsblanketten. Lämna ej in lösningar eller kladdpapper till dessa uppgifter!

Till de sista fyra uppgifterna (5p-uppgifter) skall utförliga, tydliga och välskrivna lösningar ges. Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårlästa lösningar.

Några tips och generella regler:

- Gör först de uppgifter som du tycker är lätta.
- Dubbelkolla dina svar på de uppgifter där endast svar skall lämnas.
- Alla svar skall ges på enklast möjliga form (förenkla).

Lycka till!

Anders

TMV225 / TMV176 Inledande matematik M / TD

Tentamensuppgifter

---

1. Lös olikheten $|x-1| < 1/x$. (3p)

2. Bestäm värdemängden för funktionen $f(x) = \sin(\pi/(3-1/x))$ för $x > 1$. (3p)

3. Bestäm (den bästa) Lipschitz-konstanten för funktionen $f(x) = \sqrt{\sin(3x)}$ på intervallet $[\epsilon, \pi/6]$. (3p)

4. Skriv en MATLAB-funktion som beräknar den numeriska derivatan av $f(x) = \sin(x)$ i en given punkt x för lämpligt val av steglängd h. (3p)

5. Bestäm minsta värdet för funktionen $f(x) = \frac{1+2x}{1-2x}$ på intervallet $[1, \infty]$. (3p)

6. Bestäm $f'(\pi/4)$ för $f(x) = \sin(\cos(\sin(x)))$. (3p)

7. Bestäm gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \frac{(\sin(x^\pi))^2}{1-\cos(2x^\pi)}$. (3p)

8. Bestäm linjäriseringen av $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$ runt $\bar{x} = 0.5$. (3p)

9. Bestäm $P_4(2\pi + 0.1)$ då P_4 är 4:e ordningens Taylorutveckling av $\cos(2x)$ runt $\bar{x} = 2\pi$. (3p)

10. Bestäm huruvida serien $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi n)\log(n)/(n+1)$ är absolutkonvergent, villkorligt konvergent eller divergent. (3p)

---

11. Skriv ett program som hittar en lösning till ekvationen $3\sin x = 1$ med bisektionsmetoden med ca 10 decimalers noggrannhet. (5p)

Var noggrann med att välja bra startpunkter!

12. Bevisa att en konvergent talföljd alltid måste vara begränsad. (5p)

13. Bestäm alla fixpunkter till $g(x) = 5(\sin(2x) - \cos(3x)) + x$. (5p)

14. Håkan försöker lösa ekvationen $x = g(x)$ men fixpunktsiterationen konvergerar inte. (5p)

(a) Vilken slutsats kan man då dra rörande Lipschitz-konstanten L_g? (1p)

(b) Betrakta den modifierade fixpunktsekvationen $x = \tilde{g}(x)$ där $\tilde{g}(x) = (1-\theta)x + \theta g(x)$ för $\theta \in (0, 1]$. Visa att $\tilde{g}$ har samma fixpunkter som g. (2p)

(c) Visa att om g är deriverbar och $g' < -1$ så konvergerar den modifierade fixpunktsiterationen för tillräckligt litet θ. (2p)

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Anders Logg
Telefonvakt: Carl Lundholm, tel. 0703-088304

TMV225 / TMV176 2015
2015–10–30 kl. 14.00–18.00 (V)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV225 / TMV176 Inledande matematik M / TD

Svar till tentamensuppgifter 1–10

Tentamenskod: ....

Uppgift	**Svar**	**Poäng**
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

Tenta 2015-10-30

1. $|x-1| < 1/x \quad , \quad x \neq 0$

Fall 1 | Fall 2 | Fall 3

$0 \qquad 1$

Fall 1: $x < 0$

$$|x-1| < 1/x$$
$$\Leftrightarrow \quad 1-x < 1/x$$
$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{x}_{<0} \cdot \underbrace{(1-x)}_{>0} > 0$$

$\rightsquigarrow$ Saknar lösning

Fall 2: $0 < x < 1$

$$|x-1| < 1/x$$
$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{x}_{<1} \cdot \underbrace{(1-x)}_{<1} < 1$$

OK alltid uppfyllt

Fall 3: $x \geq 1$

$$|x-1| < 1/x$$
$$\Leftrightarrow \quad x \cdot (x-1) < 1$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 - x - 1 < 0$$

Likhet då $x^2 - x - 1 = 0$

$$x = \frac{1}{2} \underset{(-)}{+} \sqrt{\frac{1}{4} + 1}$$
$$= (\sqrt{5}+1)/2$$

$\therefore$ Olikheten uppfylld då

$$1 \leq x < (\sqrt{5}+1)/2$$

$\therefore \quad 0 < x < 1$ eller $1 \leq x < (\sqrt{5}+1)/2$

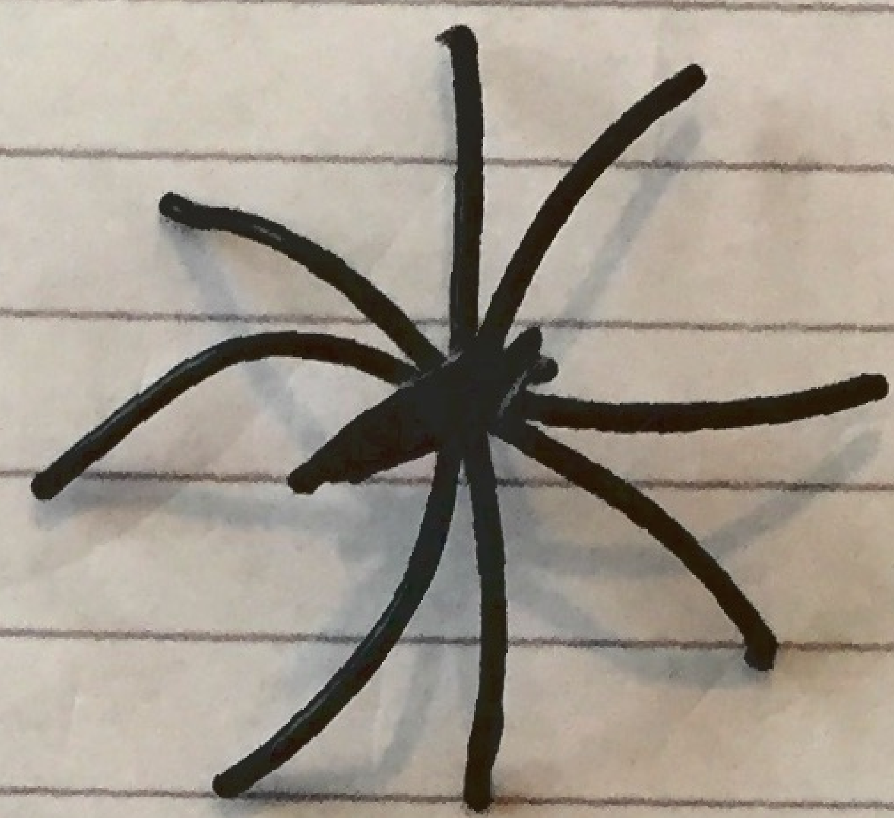
$\Leftrightarrow \quad 0 < x < (\sqrt{5}+1)/2$

Svar: $\underline{\underline{0 < x < (\sqrt{5}+1)/2}}$

2. $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3 - 1/x}\right), \quad x > 1$

Argumentet:

$$y = \frac{\pi}{3 - 1/x}$$



$x = 1: \quad \frac{\pi}{3-1} = \frac{\pi}{2}$

$x \to \infty: \quad \frac{\pi}{3-0} = \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ Argumentet varierar mellan $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow$ Största värdet antas då $y = \pi/2$.
Minsta värdet antas då $y = \pi/3$

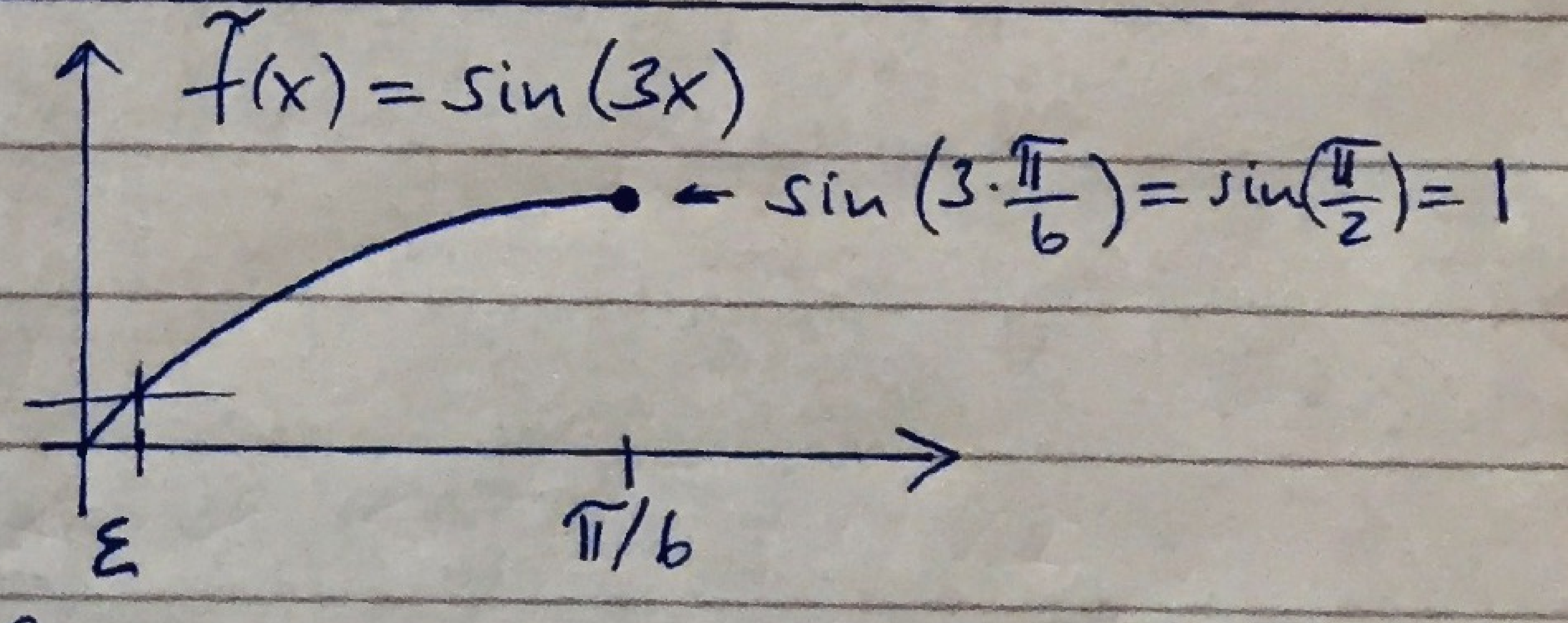
$\sin(\pi/2) = 1 \qquad \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$

$\therefore$ Svar: $\underline{\underline{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)}}$

3.

$f(x) = \sqrt{\sin(3x)}$

$f'(x) = \dfrac{3\cos(3x)}{2\sqrt{\sin(3x)}}$



Största derivatan antas i $x = \varepsilon$.

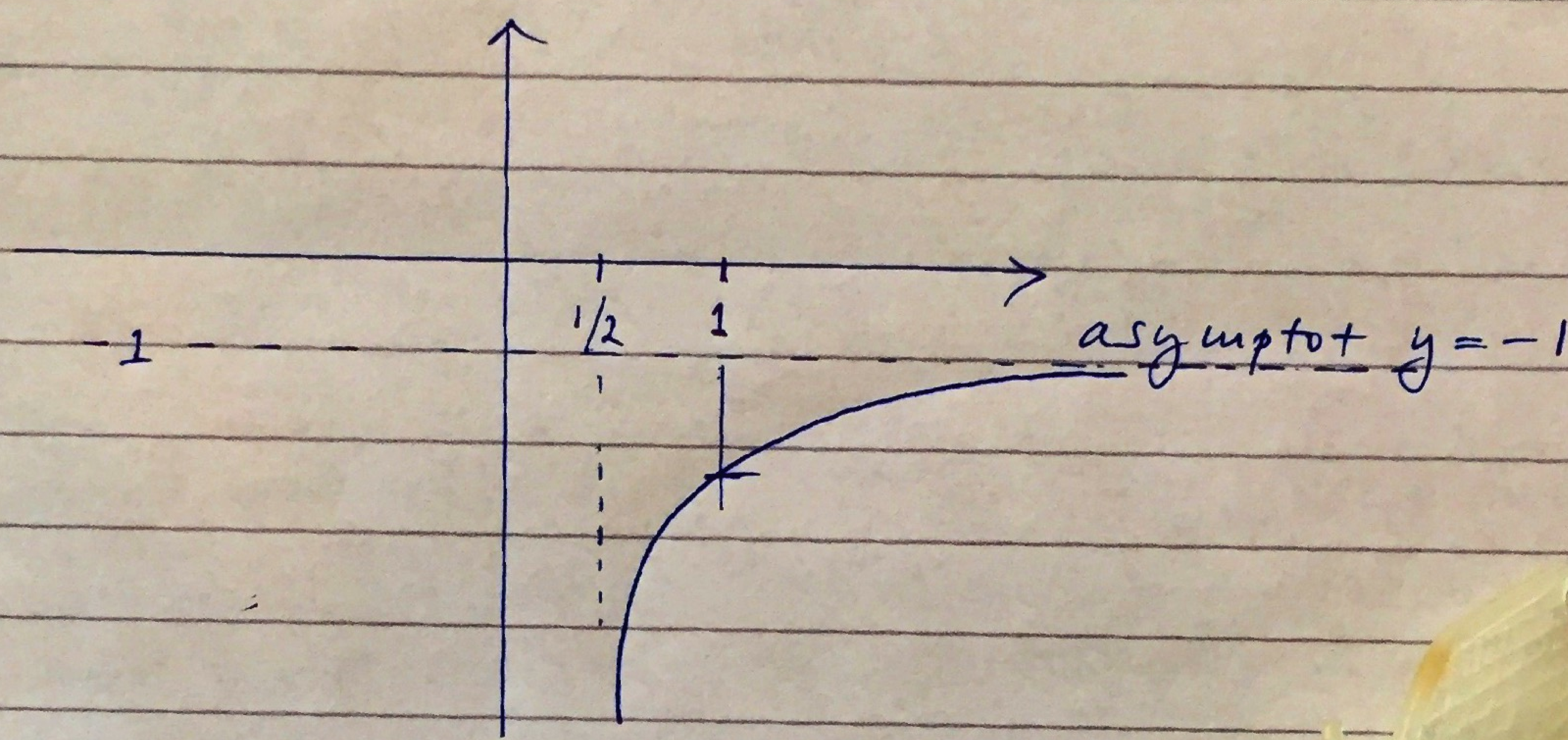
$\therefore$ Svar: $\underline{\underline{\dfrac{3\cos(3\varepsilon)}{2\sqrt{\sin(3\varepsilon)}}}}$

4.

```
function y = derivata(x)
h = sqrt (eps);
y = (sin(x+h) - sin(x)) /h;
```

5.

$$f(x) = \frac{1+2x}{1-2x}, \quad x \geq 1$$



Minsta värdet antas då $x = 1$.

$$f(1) = \frac{1+2}{1-2} = \frac{3}{-1} = \underline{\underline{-3}}$$

$\therefore$ Svar: $\underline{\underline{-3}}$

6. $f(x) = \sin(\cos(\sin(x)))$

$$f'(x) = \cos(\cos(\sin(x))) \cdot (-\sin(\sin(x)) \cdot \cos(x)$$

$$f'(\pi/4) = \cos(\cos(1/\sqrt{2})) \cdot (-\sin(1/\sqrt{2})) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \underline{\underline{-\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)}}$$

7. $$\frac{(\sin(x^{\pi}))^2}{1-\cos(2x^{\pi})} = \frac{(x^{\pi}+O(x^{3\pi}))^2}{1-(1-(2x^{\pi})^2/2+O(x^{4\pi})}$$

$$= \frac{x^{2\pi}+O(x^{6\pi})}{4x^{2\pi}/2+O(x^{4\pi})} = \frac{1+O(x^{4\pi})}{2+O(x^{2\pi})} \to \frac{1}{2}$$

då $x \to 0$

$\therefore$ Svar: $\underline{\underline{1/2}}$

---

8. $$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(1-x)^2}\cdot(-1) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$f(0.5) = \frac{1}{1-0.5} = 2 \;;\; f'(0.5) = \frac{1}{0.5^2} = 4$$

$\therefore$ Svar: $\underline{\underline{2 + 4\cdot(x-0.5)}}$

$(= 4x)$

9.

$f(x) = \cos(2x)$	1	$x = 2\pi$
$f'(x) = -2\sin(2x)$	0	
$f''(x) = -4\cos(2x)$	-4	
$f'''(x) = 8\sin(2x)$	0	
$f''''(x) = 16\cos(2x)$	16	

$$\Rightarrow P_4(x) = 1 - \frac{4}{2!}\cdot(x-2\pi)^2 + \frac{16}{4!}(x-2\pi)^4$$

$$\Rightarrow P_4(2\pi+0.1) = 1 - 2\cdot 0.1^2 + \frac{\cancel{2}\cancel{16}\cdot}{\cancel{4}\cdot 3\cdot\cancel{2}\cdot 1}\cdot 0.1^4 = 1 - 0.02 + \frac{2}{3}\cdot 10^{-4}$$

(0.98006) $$= \underline{0.98 + \frac{2}{3}\cdot 10^{-4}}$$

10. Notera: $\cos(\pi n) = (-1)^n$

$\Rightarrow$ Alternerande serie (slutligt)
Slutligt avtagande mot 0, ty
$1/n$ "vinner över" $\log(n)$.

$\Rightarrow$ Konvergent

Däremot: Ej absolutkonvergent, ty

$$\frac{\log n}{n+1} \geq \frac{c}{n} \quad \text{för stora } n$$

Harmonisk serie; ej konv.

$\therefore$ Svar: <u>Villkorligt konvergent</u>

---

11. $3\sin(x) = 1 \iff \sin(x) = 1/3 \iff \underbrace{\sin(x) - \frac{1}{3}}_{f(x)} = 0$

Notera: $f(0) = 0 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} < 0$
$f(\pi/2) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} > 0$

$\therefore$ Tag $a = 0$, $b = \pi/2$

forts. $\rightarrow$

```
f = @(x) sin(x) - 1/3;
x = 0;
X = pi /2;
tol = 1e-10;

while abs(x-X) > tol

    xbar = 0.5 * (x + X);

    if f(x) * f(xbar) < 0
        X = xbar;
    elseif f(xbar) * f(X) < 0
        x = xbar;
    else
        break
    end

end
```

(lösning: x, X eller xbar)

---

12. $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergent

$\Rightarrow \exists\, \bar{x} \in \mathbb{R} : \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N > 0 : n \geq N \Rightarrow |x_n - \bar{x}| < \varepsilon$

$\Rightarrow |x_n| = |x_n - \bar{x} + \bar{x}| \leq |x_n - \bar{x}| + |\bar{x}| < 1 + |\bar{x}|$

om $n \geq N(1)$

forts. $\longrightarrow$

Sammantaget gäller alltså att:

$$|x_n| \leq M \quad \forall n$$

där $M = \max(1 + |\bar{x}|, |x_1|, |x_2|, \dots, |x_{N(1)-1}|)$ ■

---

13. $x = g(x)$

$$\cancel{x} = 5 \cdot (\sin(2x) - \cos(3x)) + \cancel{x}$$

$\Longleftrightarrow \quad \sin(2x) = \cos(3x)$

$\Longleftrightarrow \quad \cos(\pi/2 - 2x) = \cos(3x)$

$\Longleftrightarrow \quad \pi/2 - 2x = \pm 3x + 2\pi n$

(−)

$$\begin{cases} \pi/2 - 2x = 3x + 2\pi n \\ \pi/2 - 2x = -3x + 2\pi n \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 5x = \pi/2 + 2\pi n \\ x = -\pi/2 + 2\pi n \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = \pi/10 + 2\pi n/5 \\ x = -\pi/2 + 2\pi n \end{cases}$$

$\therefore$ Svar: $x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}$ eller $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $(n \in \mathbb{Z})$

---

14. a) $L_g > 1$ (alt. $g: I \not\to I$)

b) $x = (1-\theta)x + \theta g(x)$

$\Longleftrightarrow \quad \cancel{x} - \cancel{x} + \theta x = \theta g(x)$

$\Longleftrightarrow \quad \theta x = \theta g(x), \quad \theta > 0$

$\Longleftrightarrow \quad x = g(x)$

c) $$\tilde{g}(x) = (1-\theta)x + \theta\, g(x)$$

$$\Rightarrow \tilde{g}'(x) = (1-\theta) + \theta g'$$

$$|g'(x)| < 1 \iff -1 < g' < 1$$

$\therefore$

$$-1 < 1-\theta + \theta g' < 1$$

$$\iff -2 < \underbrace{-\theta \cdot \underbrace{(1-g')}_{>0} < 0}_{\text{ok, automatiskt uppfylld}}$$

$$\iff -2 < -\theta \cdot (1-g')$$

$$\iff \theta \cdot (1-g') < 2$$

$$\iff \underline{\underline{\theta < \frac{2}{1-g'}}} \Rightarrow L_{\tilde{g}} < 1$$