MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Anders Logg
Telefonvakt: Gustav Kettil, tel. 0703–088304

TMV225 / TMV176 2015
2016–01–07 kl. 08.30–12.30 (H)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV225 / TMV176 Inledande matematik M / TD

Tentamen

Tentamen består av 10 st uppgifter vardera värda 3p och 4 st uppgifter vardera värda 5p, vilka tillsammans ger maximalt 50p. Till detta läggs de bonuspoäng (maximalt 7p) som tjänats ihop genom kursens tre duggor. Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet.

Till de första tio uppgifterna (3p-uppgifter) skall endast svar ges. Svar måste anges i rätt ruta på den bifogade svarsblanketten. Lämna ej in lösningar eller kladdpapper till dessa uppgifter!

Till de sista fyra uppgifterna (5p-uppgifter) skall utförliga, tydliga och välskrivna lösningar ges. Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Några tips och generella regler:

- Gör först de uppgifter som du tycker är lätta.
- Dubbelkolla dina svar på de uppgifter där endast svar skall lämnas.
- Alla svar skall ges på enklast möjliga form (förenkla).

Lycka till!

Anders

TMV225 / TMV176 Inledande matematik M / TD

Tentamensuppgifter

---

1. Lös olikheten $|2x+1| < 5x$. (3p)

2. Bestäm värdet av $\tan(\arcsin(0.27))$. (3p)

3. Bestäm (den bästa) Lipschitz-konstanten för funktionen $f(x) = \ln(1/x)$ på intervallet $[\epsilon^2, 1]$ för $0 < \epsilon < 1$. (3p)

4. Skriv en MATLAB-funktion som implementerar fjärde ordningens Maclaurin-polynom för funktionen $\cos x$. (3p)

5. Bestäm inversen till funktionen $f(x) = ax + b$. (3p)

6. Bestäm alla kritiska punkter till funktionen $f(x) = x + \cos x$. (3p)

7. Bestäm gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x-\tan x}$. (3p)

8. Bestäm lineariseringen av $f(x) = \exp(\sin(\pi x))$ runt punkten $\bar{x} = 3/2$. (3p)

9. Bestäm en formel för Maclaurin-serien av $f(x) = \sin(5x)$. (3p)

10. Bestäm konvergensradien för serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{3n}}{2^n}(3x+5)^n$. (3p)

---

11. Skriv ett program som löser ekvationen $x^2 + x = 100$ (för $x \in \mathbb{R}$) med Newtons metod med cirka 10 decimalers noggrannhet. (5p)

12. Formulera satsen om derivatan av en produkt. (1p) (5p)

Genomför beviset (4p).

13. Visa att $\{z_i = x_i y_i\}$ är en Cauchy-följd om $\{x_i\}$ och $\{y_i\}$ är Cauchy-följder. (5p)

14. Låt f och g vara Lipschitz-kontinuerliga funktioner på intervallet $[a, b]$ med Lipschitz-konstanter L_f, L_g och begränsade av M_f, M_g. Bestäm en Lipschitz-konstant för funktionen $h = (f+g)(f-g)$. (5p)

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Anders Logg
Telefonvakt: Gustav Kettil, tel. 0703–088304

TMV225 / TMV176 2015
2016–01–07 kl. 08.30–12.30 (H)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV225 / TMV176 Inledande matematik M / TD

Svar till tentamensuppgifter 1–10

Tentamenskod: ....

Uppgift	Svar	Poäng
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

TENTA 2016-01-07*

1.

$$|2x+1| < 5x$$

Fall 1: $2x+1 \geq 0 \iff x \geq -\frac{1}{2}$

$2x+1 < 5x$ ✓ ok

$1 < 3x$

$x > 1/3$

Fall 2: $2x+1 < 0 \iff x < -\frac{1}{2}$

$-(2x+1) < 5x$

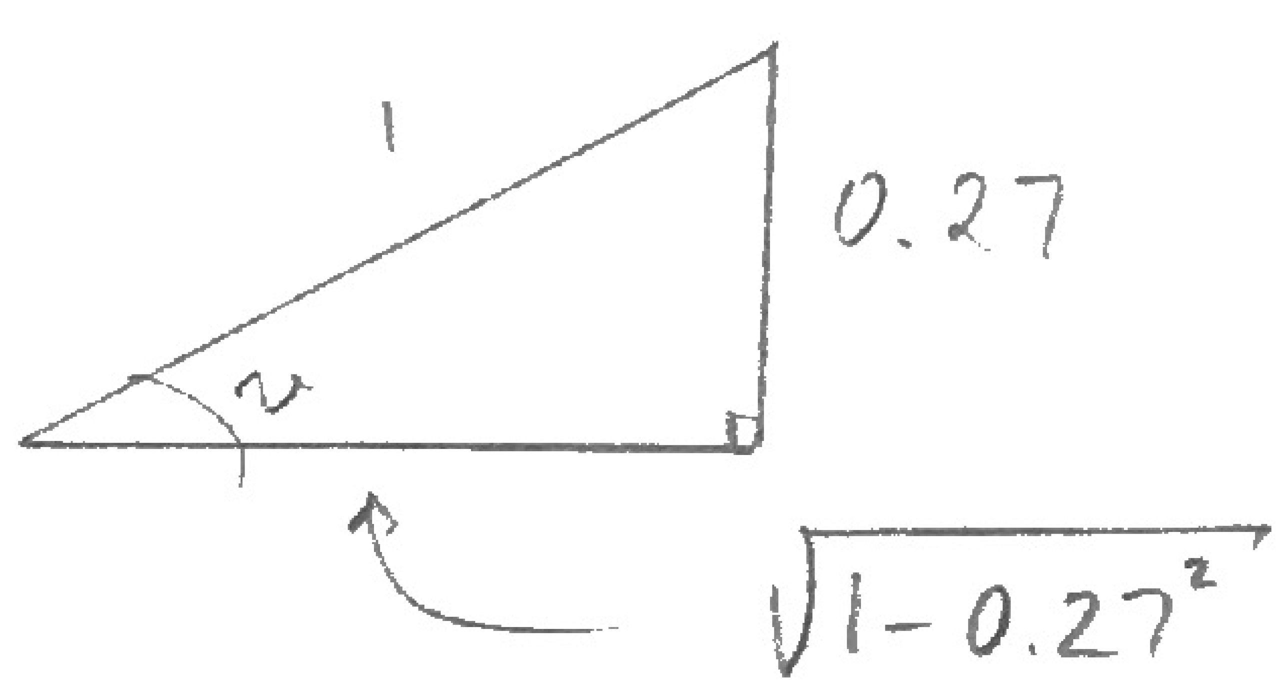
$-2x-1 < 5x$

$-1 < 7x$

$x > -1/7$

$\therefore$ Svar: $\underline{\underline{x > 1/3}}$ $\left(x \in (1/3, \infty) \right)$

2.



$$\tan v = \frac{0.27}{\sqrt{1-0.27^2}}$$

$$= \frac{0.27}{\sqrt{0.9271}} = \frac{27}{\sqrt{9271}}$$

$\therefore$ Svar: $\underline{\underline{\dfrac{27}{\sqrt{9271}}}}$ $\left(= \dfrac{27}{\sqrt{73 \cdot 127}} \right)$

primtal

---

*) Grattis till mig själv på 40-årsdagen!

3

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1/x} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-x}{x^2} = -\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \quad L_f = \max |f'| = \underline{\underline{\frac{1}{\varepsilon^2}}}$$

Svar: $\underline{\underline{1/\varepsilon^2}}$

4

```
function y = myfunc(x)
y = 1-x^2/2 + x^4/24;
```

5.

$$y = ax + b$$

$$y - b = ax$$

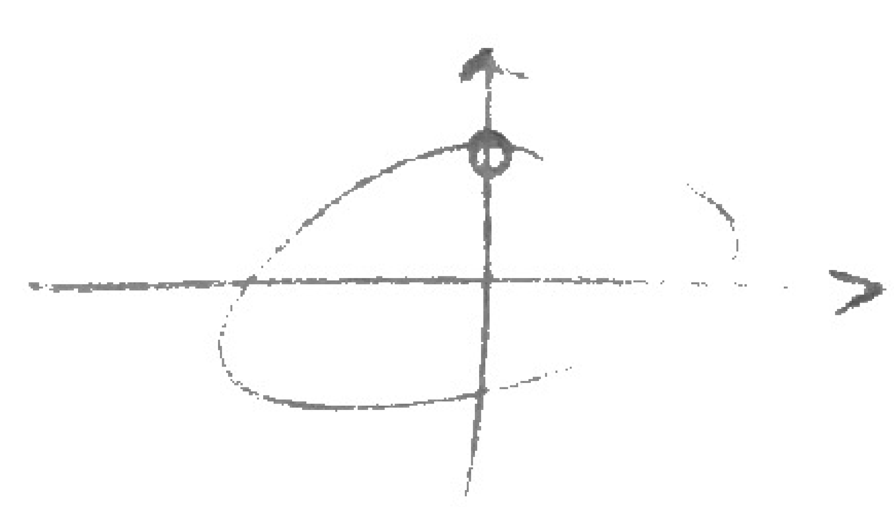
$$x = \frac{y-b}{a}$$

$\therefore$ Svar: $\underline{\underline{f^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}}}$

6.

$$f(x) = x + \cos x$$

$$f'(x) = 1 - \sin x = 0$$



$$\sin x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$\therefore$ Svar: $\underline{\underline{x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}}}$

7.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x - \tan x} \overset{l'Hôpital}{=} \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}$$

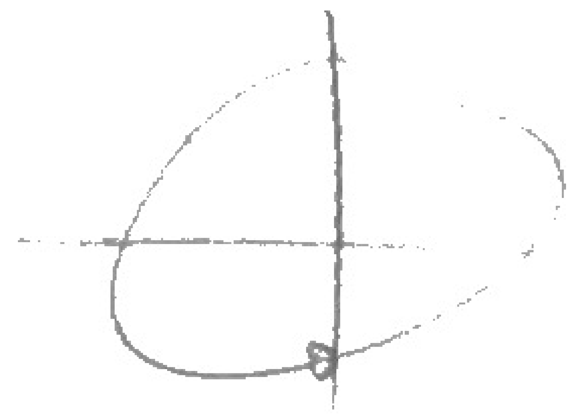
$$\overset{l'Hôpital}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{\sin x}}{-\frac{1}{\cos^3 x} \cdot (-2) \cdot (-\cancel{\sin x})} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

8.

$$f(x) = \exp(\sin(\pi x)) \qquad f(\tfrac{3}{2}) = \exp(-1)$$

$$f'(x) = \exp(\sin(\pi x)) \cdot \pi \cdot \cos(\pi x) \qquad f'(\tfrac{3}{2}) = \exp(-1) \cdot \pi \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad f(\bar{x}) + f'(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) = \exp(-1) + 0 \cdot (x - \bar{x}) = \exp(-1)$$



$\therefore$ Svar: $\underline{\underline{\exp(-1) = e^{-1} = 1/e}}$

9.

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots$$

$$\Rightarrow \quad \sin(5x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (5x)^{2k+1}$$

$\therefore$ Svar: $\underline{\underline{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (5x)^{2k+1}}}$

10.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^{3n}}{2^n} \cdot (3x+5)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^{3n}}{2^n} \cdot 3^n \cdot (x - (-\tfrac{5}{3}))^n$$

$$a_n = 5^{3n} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5^{3\cdot(n+1)} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{5^{3n} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n} = \frac{\cancel{5^{3n}} \cdot 5^3}{\cancel{5^{3n}}} \cdot \frac{3}{2}$$

$$= \frac{125 \cdot 3}{2} = \frac{375}{2} \longrightarrow L = \frac{375}{2}$$

då $n \to \infty$

$\therefore$ Svar: $\underline{R = \frac{1}{L} = \frac{2}{375}}$

11. $f(x) = x^2 - x - 100$

$f'(x) = 2x - 1$

```
x = 10;
tol= 1e-10;
dx = 2*tol;
while abs(dx)>tol
    dx= (x^2-x-100)/(2*x-1);
    x = x-dx
end
```

---

12. Se föreläsningsanteckningar !

---

13. Se tidigare tentalösningar !

---

14. Alternativ 1:

Notera:
$$L(f+g) = L_f + L_g$$
$$L(f-g) = L_f + L_g$$
$$M(f+g) = M_f + M_g$$
$$M(f-g) = M_f + M_g$$

$$\Rightarrow L((f+g)(f-g)) = L(f+g)\cdot M(f-g) + M(f+g)\cdot L(f-g)$$
$$= (L_f + L_g)(M_f + M_g) + (M_f + M_g)(L_f + L_g)$$
$$= \underline{\underline{2(L_f + L_g)\cdot(M_f + M_g)}}$$

Alternativ 2:

$$(f+g)\cdot(f-g) = f^2 - g^2$$

$$\Rightarrow L = L(f^2) + L(g^2)$$

$$= (M_f L_f + M_f L_f) + (M_g L_g + M_g L_g)$$

$$= \underline{2 M_f L_f + 2 M_g L_g}$$ (Svar; båda alternativen ok)