MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Anders Logg
Telefonvakt: Edvin Wedin, tel. 031–772 5325

TMV225 / TMV176 2016
2016–08–24 kl. 08.30–12.30 (H)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV225 / TMV176 Inledande matematik M / TD

Tentamen

Tentamen består av 10 st uppgifter vardera värda 3p och 4 st uppgifter vardera värda 5p, vilka tillsammans ger maximalt 50p. Till detta läggs de bonuspoäng (maximalt 7p) som tjänats ihop genom kursens tre duggor. Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet.

Till de första tio uppgifterna (3p-uppgifter) skall endast svar ges. Svar måste anges i rätt ruta på den bifogade svarsblanketten. Lämna ej in lösningar eller kladdpapper till dessa uppgifter!

Till de sista fyra uppgifterna (5p-uppgifter) skall utförliga, tydliga och välskrivna lösningar ges. Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Några tips och generella regler:

- Gör först de uppgifter som du tycker är lätta.
- Dubbelkolla dina svar på de uppgifter där endast svar skall lämnas.
- Alla svar skall ges på enklast möjliga form (förenkla).

Lycka till!

Anders

TMV225 / TMV176 Inledande matematik M / TD

Tentamensuppgifter

---

1. Lös olikheten $x(1-x) \geq \frac{1}{4}$. (3p)

2. Bestäm största värdet för funktionen $f(x) = x^2(1-x)^2$ på intervallet $[0, 1]$. (3p)

3. Bestäm (den bästa) Lipschitz-konstanten för funktionen $f(x) = \ln(x^\pi)$ på intervallet $[4, 8]$. (3p)

4. Skriv en MATLAB-funktion som implementerar tredje ordningens Maclaurin-polynom för funktionen $\sin x$. (3p)

5. Låt $f(x) = (x+1)/(x-1)$. Bestäm $(f^{-1})'(2)$. (3p)

6. Bestäm värdemängd för funktionen $f(x) = \ln(1 + 3/x)$. (3p)

7. Bestäm gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \frac{x\ln((1+x)^2)}{\sin(x^2)}$. (3p)

8. Bestäm linjäriseringen av $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$ runt $\bar{x} = 0.5$. (3p)

9. Bestäm en formel för Maclaurin-utvecklingen av $f(x) = \sin(3x)$. (3p)

10. Bestäm derivatan av $f(x) = \ln(\sin(\exp(x)))$ i punkten $x = \ln(\pi/3)$. (3p)

---

11. Skriv ett program som löser ekvationen $x^2 = 3$ för $x > 0$ med fixpunktsiteration med (ca) 10 decimalers noggrannhet. Ledning: Använd omskrivningen $g(x) = x + \alpha f(x)$ med $\alpha = -0.1$. (5p)

12. Formulera satsen om derivatan av en produkt. (1p) (5p)

Genomför beviset (4p).

13. Visa att derivatan av $\arcsin x$ ges av $1/\sqrt{1-x^2}$. (5p)

14. Visa att $\{z_i = 2x_iy_i + x_i\}$ är en Cauchy-följd om $\{x_i\}$ och $\{y_i\}$ är Cauchy-följder. (5p)

TMV225 / TMV176 Inledande matematik M / TD

Svar till tentamensuppgifter 1–10

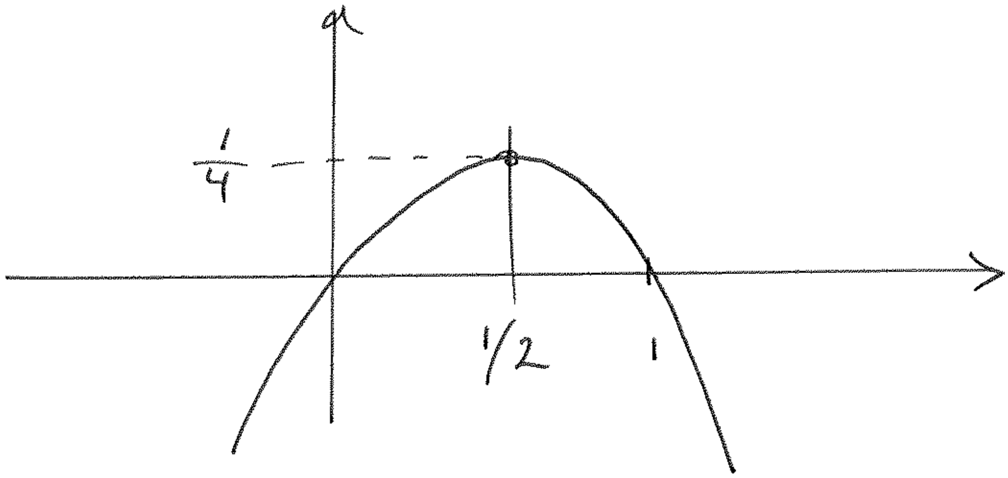
Tentamenskod: ....

Uppgift	Svar	Poäng
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

TMV225 TENTA 2016-08-24

1.

$$f(x) = x \cdot (1-x)$$



$$\max f(x) = \frac{1}{4} \quad \text{då } x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad x \cdot (1-x) \geq \frac{1}{4} \iff \underline{\underline{x = \frac{1}{2}}}$$

2.

$$f(x) = x^2 \cdot (1-x)^2$$

Se föreg. uppgift.

$$\max f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{16}}}$$

3.

$$f(x) = \ln x^{\pi} = \pi \ln x$$

$$f'(x) = \pi / x$$

$$\Rightarrow L_f = \max |f'| = f'(4) = \underline{\underline{\pi / 4}}$$

4. function y = myfunction (x)
y = x - x^3/6;

---

5. $$y = \frac{x+1}{x-1}$$

Løs ut x:

$$x = \frac{y+1}{y-1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{\cancel{y}-1-(\cancel{y}+1)}{(y-1)^2} = \frac{-2}{(y-1)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left.\frac{dx}{dy}\right|_{y=2} = \frac{-2}{(2-1)^2} = \underline{\underline{-2}}$$

---

6. $$f(x) = \ln(\underbrace{1+3/x}_{>0}) \quad , \quad x \neq 0$$

$\underline{x>0}$: $\quad 1 + 3/x > 0 \quad \underline{\underline{\text{ok}}}$

$\underline{x<0}$: $\quad 1 + 3/x > 0$

$$\Leftrightarrow \quad x + 3 < 0$$

$$x < -3$$

$$\therefore \quad D(f) = (-\infty, -3) \cup (0, \infty)$$

7. $$f(x) = \frac{x \ln((1+x)^2)}{\sin(x^2)}$$ ③

$$= 2 \cdot \frac{x \ln(1+x)}{\sin(x^2)}$$

$$\sim 2 \cdot \frac{x \cdot x}{x^2} = 2$$

$$\therefore \lim_{x \to 0} f(x) = \underline{\underline{2}}$$

---

8. $$f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -(1-x)^{-2} \cdot (-1) = (1-x)^{-2}$$

Linjärisering:

$$f(x) \approx f(0.5) + (x - 0.5) \cdot f'(0.5)$$

$$= \frac{1}{1-0.5} + (x - 0.5) \cdot \frac{1}{(1-0.5)^2}$$

$$= 2 + (x - 0.5) \cdot 4$$

$$= 2 + 4x - 2 = \underline{\underline{4x}}$$

---

9. $$\sin(3x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{(3x)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{3^{2k+1} \cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

10. $f(x) = \ln(\sin(\exp(x)))$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\cos(\exp(x)) \cdot \exp(x)}{\sin(\exp(x))}$$

$$\Rightarrow f'(\ln(\pi/3)) = \frac{\cos(\pi/3) \cdot \pi/3}{\sin(\pi/3)}$$

$$= \frac{1/2 \cdot \pi/3}{\sqrt{3}/2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

11.

```
x = 1;  α = -0.1;
TOL = 1e-10;
dx = 2*TOL
while abs(dx) > TOL
    dx = +α*(x^2-3);
    x = x + dx
end
```

---

12. Se föreläsningsanteckningar

13. $y = \arcsin x \ ; \ x = \sin y$ (5)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} =$$

$$= \frac{1}{(\pm)\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ty $y \in [-\pi/2, \pi/2]$

$\Rightarrow \cos y \geq 0$

---

14. x_i Cauchy, y_i Cauchy

$$|z_i - z_j| = |2x_iy_i + x_i - (2x_jy_j + \cancel{y_j}\, x_j)|$$

$$\leq |2x_iy_i - 2x_jy_j| + |x_i - x_j|$$

$$= 2 \cdot |x_iy_i - x_jy_j| + |x_i - x_j|$$

$$= 2 \cdot |x_iy_i - x_iy_j + x_iy_j - x_jy_j| + |x_i - x_j|$$

$$\leq 2 \cdot |x_i| \cdot |y_i - y_j| + 2|y_j| \cdot |x_i - x_j| + |x_i - x_j|$$

(ty $x_i \to \bar{x}$ och $y_i \to \bar{y}$)

$$= 2 \cdot |(\bar{x} + x_i - \bar{x})| \cdot |y_i - y_j| + 2|\bar{y} + y_j - \bar{y}|\,|x_i - x_j|$$
$$+ |x_i - x_j|$$

$$\leq 2 \cdot (|\bar{x}| + |x_i - \bar{x}|) \cdot |y_i - y_j| + 2(|\bar{y}| + |y_i - \bar{y}|) \cdot |x_i - x_j|$$
$$+ |x_i - x_j|$$

för $i,j \geq N$ tillräckligt stort.

$$\leq 2 \cdot (1 + |\bar{x}|) \cdot |y_i - y_j| + 2 \cdot (1 + |\bar{y}|) \cdot |x_i - x_j| + |x_i - x_j| < \varepsilon$$