MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Anders Logg
Telefonvakt: Felix Held, tel. 031–772 5325

TMV225 2017
2017–10–28 kl. 14.00–18.00 (SB Multi)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV225 Inledande matematik M

Tentamen

Tentamen består av 10 st uppgifter vardera värda 3p och 4 st uppgifter vardera värda 5p, vilka tillsammans ger maximalt 50p. Till detta läggs de bonuspoäng (maximalt 7p) som tjänats ihop genom kursens tre duggor. Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet.

Till de första tio uppgifterna (3p-uppgifter) skall endast svar ges. Svar måste anges i rätt ruta på den bifogade svarsblanketten. Lämna ej in lösningar eller kladdpapper till dessa uppgifter!

Till de sista fyra uppgifterna (5p-uppgifter) skall utförliga, tydliga och välskrivna lösningar ges. Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Några tips och generella regler:

- Gör först de uppgifter som du tycker är lätta.
- Dubbelkolla dina svar på de uppgifter där endast svar skall lämnas.
- Alla svar skall ges på enklast möjliga form (förenkla).

Lycka till!

Anders

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Anders Logg
Telefonvakt: Felix Held, tel. 031–772 5325

TMV225 2017
2017–10–28 kl. 14.00–18.00 (SB Multi)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV225 Inledande matematik M

Tentamensuppgifter

---

1. Bestäm största a så att $\forall x > 0 : \sqrt{\sin(\ln(x)) + a} \leqslant \pi$. (3p)

2. Bestäm värdemängden för funktionen $f(x) = |\sin(2x)/x|$. (3p)

3. Bestäm gränsvärdet $\lim_{x\to\infty} \sqrt{3+x} - \sqrt{x-3}$. (3p)

4. Skriv en funktion `S_h(f, x, h)` som beräknar numeriska derivatan av en given funktion `f` i en given punkt `x` med hjälp av symmetrisk differenskvot med steglängd `h`. (3p)

5. Bestäm $a > 0$ så att $f(x) = ax^a$ är Lipschitz-kontinuerlig på intervallet $[0, 1]$ med (minsta) Lipschitz-konstant $L_f = 5$. (3p)

6. Bestäm lineariseringen av $f(x) = \ln(\ln(\ln(x)))$ i punkten $x = 3$. (3p)

7. Bestäm konvergensradien för serien $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3+x)^k \cdot 3^{2k}}{(2k+1)!}$. (3p)

8. Bestäm alla fixpunkter till $g(x) = x^2 - 3$. (3p)

9. Bestäm en approximation $x_2 \approx \sqrt{5}$ genom att utföra två Newtoniterationer för ekvationen $x^2 - 5 = 0$ med $x_0 = 1$. (3p)

10. Bestäm gränsvärdet $\lim_{x\to 0}(3x)^{5x}$. (3p)

---

11. Skriv ett program som beräknar $\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1-(k/n)^2}$ för $n = 10^0, 10^1, \ldots, 10^9$. (4p) Vilket tal konvergerar summan mot? (1p) (5p)

12. Bevisa att konvergent talföljd alltid måste vara en Cauchy-följd. (5p)

13. Bevisa att $\log_a(x) = \log_b(x)/\log_b(a)$ för $a, b > 0, a, b \neq 1$. (5p)

14. Bevisa feluppskattningen $|f'(x) - S_h[f, x]| \leqslant \frac{h^2}{6} \max |f'''|$ för den symmetriska differenskvoten $S_h[f, x]$. *Ledning:* Taylorutveckla f kring punkten x. (5p)

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Anders Logg
Telefonvakt: Felix Held, tel. 031–772 5325

TMV225 2017
2017–10–28 kl. 14.00–18.00 (SB Multi)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV225 Inledande matematik M

Svar till tentamensuppgifter 1–10

Tentamenskod: ....

Uppgift	Svar	Poäng
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

TENTA 2017-10-28

1. $\max_{x} \sin(\ln(x)) = 1$

$\sqrt{1+a} \leq \pi \Rightarrow 1+a \leq \pi^2 \Rightarrow a \leq \pi^2 - 1$

$\therefore \quad \underline{\underline{a = \pi^2 - 1}}$

---

2. $\min = 0 \quad (\text{då } x = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots)$

$\max$ då $x \to 0$ (men $x = 0 \notin D(f)$!)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\cos(2x)}{x} = 2$$

$\therefore \quad R(f) = [0, 2)$

---

3. $$\sqrt{3+x} - \sqrt{x-3} = \frac{(\sqrt{3+x} - \sqrt{x-3})(\sqrt{3+x} + \sqrt{x-3})}{\sqrt{3+x} + \sqrt{x-3}}$$

$$= \frac{3 + \cancel{x} - (\cancel{x} - 3)}{\sqrt{3+x} + \sqrt{x-3}} = \frac{6}{\sqrt{3+x} + \sqrt{x-3}} \to 0 \text{ då } x \to \infty$$

4.
```
function y = S_h(f, x, h)
    y = (f(x+h) - f(x-h)) ./ (2*h);
end
```

---

5. $f(x) = ax^a$

$f'(x) = a^2 x^{a-1}$, $a \geq 1$ ty annars ej Lipschitz $(f' \to \infty)$

max då $x=1$: $a^2 \cdot 1 = a^2 = L_f = 5$

$\therefore \quad \underline{\underline{a = \sqrt{5}}}$

---

6. $f(x) = \ln(\ln(\ln(x)))$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(\ln(x))} \cdot \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\rightarrow L[f,3] = \ln(\ln(\ln(3))) + \frac{x-3}{3 \cdot \ln(3) \cdot \ln(\ln(3))}$$

---

7. $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3+x)^{2k} \cdot 3^{2k}}{(2k+1)!} \quad ; \quad a_k = \frac{3^{2k}}{(2k+1)!}$$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{3^{2(k+1)} \Big/ (2\cdot(k+1)+1)!}{3^{2k} \Big/ (2k+1)!}$$

$$= 3^{2k+2-2k} \cdot \frac{(2k+1)!}{(2k+3)!}$$

$$= 3^2 \cdot \frac{1}{(2k+3)\cdot(2k+2)} \rightarrow 0 \text{ då } k \rightarrow \infty$$

$\therefore$ $R = \infty$ (konvergent för alla x)

---

8. $g(x) = x^2 - 3$

$x = g(x) = x^2 - 3$

$x^2 - x - 3 = 0$

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

9.

$$f(x) = x^2 - 5$$

$$f'(x) = 2x$$

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - 5}{2x_0} = 1 - \frac{1-5}{2} = 1 + \frac{4}{2} = 3$$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^2 - 5}{2x_1} = 3 - \frac{9-5}{2 \cdot 3} = 3 - \frac{4}{6} = 3 - \frac{2}{3}$$

$$= \frac{9-2}{3} = \underline{\underline{\frac{7}{3}}} \quad (\approx 2.33)$$

10.

$$(3x)^{5x} = \exp(\ln(3x^{5x})) = \exp(\underbrace{5x\ln(3x)}_{\to 0 \text{ då } x \to 0})$$

$$\to \exp(0) = \underline{\underline{1}} \text{ då } x \to 0$$

11.

```
for p = 0:9
    n = 10^p;
    k = 1:n
    s = (4/n)*sum(sqrt(1-(k/n).^2));
end
```

Konvergerar mot $\underline{\underline{\pi}}$.

---

12. Se föreläsningsanteckningar

13.

$$VL = \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

$$HL = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(b)} \Big/ \frac{\ln(a)}{\ln(b)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

$\therefore$ $\underline{\underline{VL = HL}}$ ■

14.

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f'''(\xi)$$

$$f(x-h) = f(x) + (-h) f'(x) + \frac{(-h)^2}{2} f''(x) + \frac{(-h)^3}{6} f'''(\eta)$$

$$\Rightarrow f(x+h) - f(x-h) = 2h f'(x) + \frac{h^3}{6} \cdot (f'''(\xi) + f'''(\eta))$$

$$\Rightarrow S_h[f,x] = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

$$= f'(x) + \frac{h^2}{12} (f'''(\xi) + f'''(\eta))$$

$$\Rightarrow |S_h[f,x] - f'(x)| = \frac{h^2}{12} \cdot |f'''(\xi) + f'''(\eta)|$$

$$\leq \frac{h^2}{12} \cdot 2 \cdot \max |f'''|$$

$$= \underline{\underline{\frac{h^2}{6} \cdot \max |f'''|}}$$