MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Anders Logg, tel. 031–772 5346
Telefonvakt: Kristian Holm, tel. 031–772 5325

TMV225 2018
2018–08–29 kl. 08.30–12.30 (SB)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV225 Inledande matematik M

Tentamen

Tentamen består av 10 st uppgifter vardera värda 3p och 4 st uppgifter vardera värda 5p, vilka tillsammans ger maximalt 50p. Till detta läggs de bonuspoäng (maximalt 7p) som tjänats ihop genom kursens tre duggor. Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet.

Till de första tio uppgifterna (3p-uppgifter) skall endast svar ges. Svar måste anges i rätt ruta på den bifogade svarsblanketten. Lämna ej in lösningar eller kladdpapper till dessa uppgifter!

Till de sista fyra uppgifterna (5p-uppgifter) skall utförliga, tydliga och välskrivna lösningar ges. Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Några tips och generella regler:

- Gör först de uppgifter som du tycker är lätta.
- Dubbelkolla dina svar på de uppgifter där endast svar skall lämnas.
- Alla svar skall ges på enklast möjliga form (förenkla).

Lycka till!

Anders

TMV225 Inledande matematik M

Tentamensuppgifter

---

1. Låt $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ och $C = \{3, 4, 5\}$. Bestäm mängden $(A \cap B) \setminus C$. (3p)

2. Bestäm definitionsmängden för $f(x) = |\ln(\sin(3x))|$. (3p)

3. Bestäm (den bästa) Lipschitz-konstanten på intervallet $[2, 5]$ för funktionen $f(x) = 3x^3 - 5x^2$. (3p)

4. Skriv en funktion `foo(n)` som beräknar och returnerar summan $\sum_{k=1}^{n} k^2$. (3p)

5. Bestäm (den bästa) Lipschitz-konstanten för funktionen $f(x) = 2\sin(5x)\cos(5x)$. (3p)

6. Bestäm linjäriseringen av funktionen $f(x) = \cos(\cos(\cos(x)))$ i punkten $\bar{x} = \pi/2$. (3p)

7. Bestäm konvergensradien för serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+k^4}{\sqrt{k}}(3 - \frac{x}{3})^k$. (3p)

8. Bestäm den största fixpunkten till $g(x) = 5x^2 - 3x - 1$. (3p)

9. Bestäm en approximation $x_2 \approx \sqrt{10}$ genom att utföra två Newtoniterationer för ekvationen $x^2 - 10 = 0$ med $x_0 = 1$. (3p)

10. Bestäm den första inflexionspunkter till $f(x) = \cos(3x)$ på intervallet $[2, 3]$. (3p)

---

11. Skriv ett program som löser ekvationen $x^2 = 3$ för $x > 0$ med fixpunktsiteration med (ca) 10 decimalers noggrannhet. Ledning: Använd omskrivningen $g(x) = x + \alpha f(x)$ med $\alpha = -0.1$. (5p)

12. Bevisa att en konvergent talföljd alltid måste vara en Cauchy-följd. (5p)

13. Låt $f(x) = \frac{x+2/x}{2}$ och låt $f^2(x) = f(f(x))$, $f^3(x) = f(f(f(x)))$ osv. Bestäm $f^\infty(1)$. (5p)

14. Låt f och g vara Lipschitz-kontinuerliga funktioner på intervallet $[a, b]$ med Lipschitz-konstanter L_f, L_g och begränsade av M_f, M_g. Bestäm en Lipschitz-konstant för funktionen $h = f^2 g^2$. (5p)

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Anders Logg, tel. 031–772 5346
Telefonvakt: Kristian Holm, tel. 031–772 5325

TMV225 2018
2018–08–29 kl. 08.30–12.30 (SB)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV225 Inledande matematik M

Svar till tentamensuppgifter 1–10

Tentamenskod: ....

Uppgift	Svar	Poäng
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

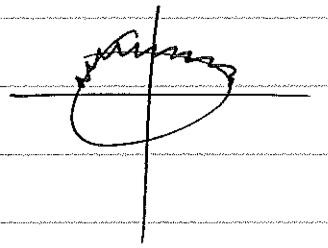
TENTA 2018-08-29

1. $A \cap B = \{2,3\}$

$(A \cap B) \setminus \{3,4,5\} = \underline{\underline{\{2\}}}$

---

2. $f(x) = |\ln(\underbrace{\sin(3x)}_{>0})|$



$\sin(3x) > 0$

$\Leftrightarrow \quad 3x \in (0,\pi) + 2\pi n$

$\Leftrightarrow \quad x \in (0,\pi/3) + \frac{2\pi n}{3}$

$\therefore \quad \underline{\underline{x \in \left(\frac{2\pi n}{3}, \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)}}$

---

3. $f(x) = 3x^3 - 5x^2$

$\Rightarrow f'(x) = 9x^2 - 10x, = 0$ då $x = 0$ eller $9x = 10$, $x = 10/9 \notin (2,5)$

$\Rightarrow f''(x) = 18x - 10, = 0$ då $18x = 10$

$\Leftrightarrow \quad x = 10/18 \notin (2,5)$

$\therefore$ 1) $f'(x)$ byter ej tecken på $(2,5)$

2) $|f'(x)|$ har ej maximum i inre punkt på $(2,5)$

$\therefore$ Undersök ändpunkterna 2 och 5.

$|f'(2)| = 9 \cdot 2^2 - 10 \cdot 2 = 9 \cdot 4 - 20 = 36 - 20$

$= 16$

$|f'(5)| = 9 \cdot 5^2 - 10 \cdot 5 = (9 \cdot 5 - 10) \cdot 5$

$= 35 \cdot 5 = 150 + 25 = \underline{\underline{175}}$

Svar: $L_f = \underline{\underline{175}}$

4.

```
function y = foo(n)
    y = sum((1:n).^2);
end
```

5.

$$f(x) = 2\sin(5x)\cos(5x) = \sin(10x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 10 \cdot \cos(10x)$$

$$\Rightarrow L_f = \max|f'| = \underline{\underline{10}}$$

6.

$$f(x) = \cos(\cos(\cos(x)))$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\sin(\cos(\cos(x))) \cdot (-\sin(\cos(x)) \cdot (-\sin x))$$

$$= -\sin(\cos(\cos(x))) \cdot \sin(\cos(x)) \cdot \sin(x)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos(\cos(\cos(\pi/2))) = \cos(\cos(0))$$

$$= \cos(1)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\cos(0)) \cdot \sin(0) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow L_f[f, \bar{x}](x) = \underline{\underline{\cos(1)}}$$

7.

$$\tilde{a}_k = \frac{1+k^4}{\sqrt{k}}\left(3 - \frac{x}{3}\right)^k = (-1)^k \frac{1+k^4}{\sqrt{k}}\left(\frac{x}{3} - 3\right)^k$$

$$= \underbrace{(-1)^k \frac{1+k^4}{\sqrt{k}}\left(\frac{1}{3}\right)^k}_{= a_k}(x-9)^k$$

$$\Rightarrow \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{1+(k+1)^4}{\sqrt{k+1}}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} \Big/ \left(\frac{1+k^4}{\sqrt{k}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1+(k+1)^4}{1+k^4}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{3} \to \frac{1}{3} \Rightarrow \underline{\underline{R=3}}$$

då $k \to \infty$

8. $g(x) = 5x^2 - 3x - 1 = x$

$$5x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{1}{5} = 0$$

$$x = \frac{2}{5} \pm \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{5}{25}} = \frac{2}{5} \pm \sqrt{\frac{9}{25}}$$

$$= \frac{2}{5} (\pm) \frac{3}{5} = \frac{5}{5} = \underline{\underline{1}}$$

---

9. $f(x) = x^2 - 10$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x$$

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - 10}{2x_0} = 1 - \frac{1-10}{2}$$

$$= 1 + \frac{9}{2} = \frac{2+9}{2} = \frac{11}{2}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^2 - 10}{2x_1} = \frac{11}{2} - \frac{\left(\frac{11}{2}\right)^2 - 10}{2 \cdot \frac{11}{2}}$$

$$= \frac{11}{2} - \frac{\frac{121}{4} - \frac{40}{4}}{11} = \frac{11}{2} - \frac{81}{44}$$

$$= \frac{44 \cdot 11 - 2 \cdot 81}{88} = \frac{440 + 44 - 162}{88}$$

$$= \frac{\cancel{322}^{161}}{\cancel{88}_{44}} = \left(\frac{23 \cdot 7}{4 \cdot 11}\right) = \underline{\underline{\frac{161}{44}}}$$

10. $f(x) = \cos(3x)$

$\Rightarrow f'(x) = -3\sin(3x)$

$\Rightarrow f''(x) = -9\cos(3x)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(3x) = 0$

$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + \pi n$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3} \approx \underbrace{0.5 + n}_{\approx 2.5 \text{ då } n=2}$

$\cap$

$(2,3)$

På intervallet $[2,3]$:

$n = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

$(\approx 2,62)$

11.

```
x = 1;
α = -0.1;
TOL = 1e-10;
dx = 2*TOL;
while abs(dx) > TOL
    dx = α* (x^2-3);
    x = x+dx
end
```

12. Se föreläsningsanteckningar

13. Iteration med

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 2/x_n}{2}$$

är Newtons metod för lösning av

$$x^2 = 2$$

$x_0 = 1$ ger talföljd $x_n \to \sqrt{2}$

$\therefore$ Svar: $\underline{\underline{f^{\infty}(1) = \sqrt{2}}}$

---

14. <u>Formel:</u> $L_{fg} = M_f L_g + M_g L_f$

$$\begin{cases} L_{f^2} = M_f L_f + M_f L_f = 2 M_f L_f \\ L_{g^2} = M_g L_g + M_g L_g = 2 M_g L_f \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_{f^2} = M_f^2 \\ M_{g^2} = M_g^2 \end{cases}$$

$\to \quad L_h = M_{f^2} L_{g^2} + M_{g^2} L_{f^2}$

$= M_f^2 \cdot 2 M_g L_g + M_g^2 \cdot 2 M_f L_f$

$= \underline{2 M_f M_g \cdot (M_f L_g + M_g L_f)}$