

TMV225 Inledande matematik M

Svarsblankett

Tentamenskod: _____

Del A (12 x 3p = 36p)

	Svar	Poäng (0/1)
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
	Summa	
	× 3 =	

Del B (4 x 2p = 8p)

	Svar	Poäng (0/1)
1		
2		
3		
4		
	Summa	
	× 2 =	

Del C (2 x 3p = 6p)

	Svar	Poäng (0/1)
1		
2		
	Summa	
	× 3 =	

Denna del fylls i av examinator!

Del A (räkneuppgifter)	
Del B (teorifrågor)	
Del C (programmering)	

Summa tentamen	
Bonuspoäng	
Totalsumma	

TMV225 Inledande matematik M

Instruktioner

Tentamen består av tre delar:

- Del A: Räkneuppgifter ($12 \times 3p = 36p$)
- Del B: Teorifrågor ($4 \times 2p = 8p$)
- Del C: Programmering ($2 \times 3p = 6p$)

Tillsammans ger dessa uppgifter maximalt 50p. Till detta läggs de bonuspoäng (maximalt 10p) som tjänats ihop under kursen gång. Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet.

Svar måste anges i rätt ruta på svarsblanketten!

Lämna ej in lösningar eller kladdpapper!

Några tips och generella regler:

- Gör först de uppgifter som du tycker är lätta.
- Dubbelkolla dina svar (räkna om möjligt varje uppgift flera gånger).
- Alla svar skall ges på enklast möjliga form (förenkla).

Lycka till!

Anders

TMV225 Inledande matematik M

Tentamensuppgifter

Del A: Räkneuppgifter

1. Låt $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ och $C = \{1, 3, 5\}$.
Bestäm antalet element i mängden $(A \setminus B) \times C$.
2. Bestäm största x så att $|x + 1| \leq |x - 1|$.
3. Bestäm definitionsmängden för $f(x) = \ln(x) + \ln(1 - x) + \ln(2 - 1/x)$.
4. Bestäm värdet av $\tan(\arcsin(0.5))$.
5. Bestäm om möjligt (bästa) Lipschitz-konstanten för $f(x) = \sqrt{|x + 1|}$ på $I = \mathbb{R}$.
6. Bestäm gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{25x^4 + 3x^2} - 5x^2$.
7. Beräkna andraderivatan av $f(x) = \sin(x)/\exp(\sin(x))$ i $x = \pi/4$.
8. Bestäm största värdet av $f(x) = 5 \sin(\pi \ln(1 + x))$ på intervallet $[0, 1]$.
9. Beräkna andra ordningens Taylorpolynom för $f(x) = (2 \exp(x))^3$ runt $\bar{x} = 2$ i $x = 3$.
10. Bestäm konvergensradien för potensserien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^3}{k+8k^4+2} (3x+5)^k$.
11. Beräkna en approximativ lösning till $5x^2 - 10x + 2 = 0$ genom att utföra två iterationer med fixpunktsiteration med startgissning $x_0 = 1$ och $\alpha = 0.2$ (beräkna x_2).
12. Beräkna en approximativ lösning till $5x^2 - 10x + 2 = 0$ genom att utföra två iterationer med Newtons metod med startgissning $x_0 = 0$ (beräkna x_2).

Del B: Teorifrågor

1. Hur stort är talet ϵ_{mach} (på en normal dator)?
2. Vad kallas den formel som säger att $\sin(\pi - x) = \sin(x)$?
3. Vad kallas en serie som är konvergent men inte absolutkonvergent?
4. Vad kallas en funktion som är lika med sin Taylorserie?

Del C: Programmering

1. Vilket värde har variabeln x vid programmets slut?

MATLAB code

```
1 x = 3;
2 k = 0;
3
4 while k < 10
5     x = foo(x);
6     k = k + 1;
7 end
8
9 function y = foo(x)
10     y = 2*x;
11 end
```

2. Vilket tal beräknar programmet?

MATLAB code

```
1 x = 0;
2 for k = 0:10
3     x = x + 0.5^(2*k + 1) / factorial(2*k + 1) * (-1)^k;
4 end
```

TMV225 Inledande matematik M

Svarsblankett

Tentamenskod: Logg

Del A (12 x 3p = 36p)

	Svar	Poäng (0/1)
1	6	
2	0	
3	(1/2, 1)	
4	1/√3	
5	Ej Lipschitz "L=∞"	
6	3/10	
7	$-(1+\sqrt{2})/(2\sqrt{2}e^{1/\sqrt{2}})$	
8	5	
9	68 exp(6)	
10	1/3	
11	4/25 = 0.16	
12	9/40 = 0.225	
	Summa	
	× 3 =	

Del B (4 x 2p = 8p)

	Svar	Poäng (0/1)
1	$2e^{-16}$	
2	vinkelsupplementär id	
3	villkorligt konvergent	
4	analytisk	
	Summa	
	× 2 =	

Del C (2 x 3p = 6p)

	Svar	Poäng (0/1)
1	3072	
2	sin(0.5)	
	Summa	
	× 3 =	

Denna del fylls i av examinator!

Del A (räkneuppgifter)	
Del B (teorifrågor)	
Del C (programmering)	

Summa tentamen	
Bonuspoäng	
Totalsumma	

Del A

1.

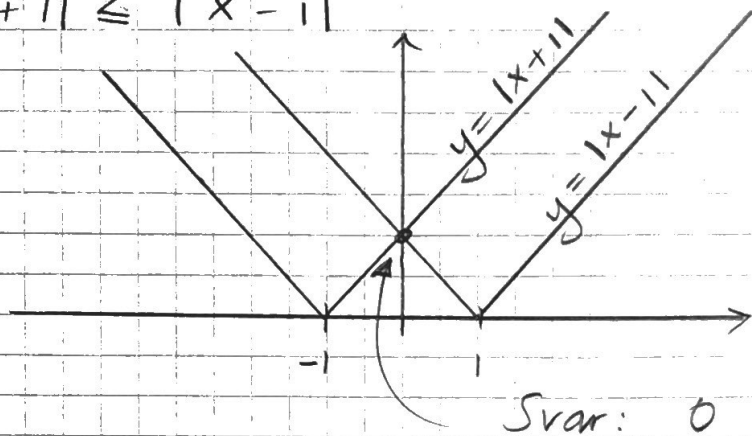
$$A \setminus B = \{1, 5\}$$

$$C = \{1, 3, 5\}$$

$$\Rightarrow |(A \setminus B) \times C| = 2 \cdot 3 = \underline{\underline{6}}$$

2.

$$|x+1| \leq |x-1|$$



Svar: 0

3.

$$f(x) = \ln(x) + \ln(1-x) + \ln(2-1/x) \quad (\text{och } x \neq 0)$$

$$\swarrow \\ \underline{x > 0}$$

$$\downarrow \\ 1-x > 0$$

$$\searrow \\ 2-1/x > 0$$

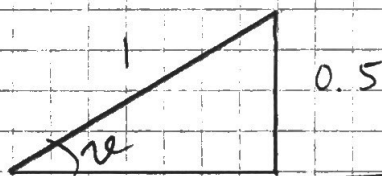
$$\Leftrightarrow \underline{x < 1}$$

$$\Leftrightarrow 2 > 1/x$$

$$(x > 0) \\ \Leftrightarrow \underline{x > 1/2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{D(f) = (1/2, 1)}}$$

4.



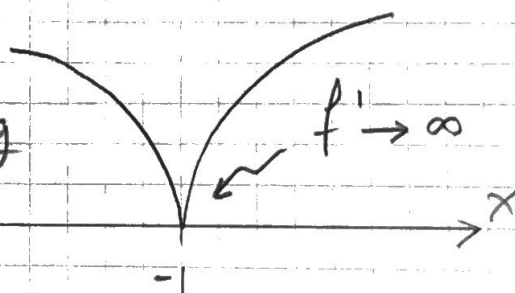
$$\sqrt{1-0.5^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \tan(\nu) = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \underline{\underline{1/\sqrt{3}}}$$

5.

$$f(x) = \sqrt{|x+1|}$$

Ej Lipschitz-kontinuerlig
("Lf = ∞")



6.

$$\sqrt{25x^4 + 3x^2} - 5x^2$$

$$= \frac{(\sqrt{25x^4 + 3x^2} - 5x^2)(\sqrt{25x^4 + 3x^2} + 5x^2)}{\sqrt{25x^4 + 3x^2} + 5x^2}$$

$$= \frac{\cancel{25x^4} + 3x^2 - \cancel{25x^4}}{\sqrt{25x^4 + 3x^2} + 5x^2} = \frac{3}{\sqrt{25 + 3x^{-2}} + 5}$$

$$\rightarrow \frac{3}{\sqrt{25} + 5} = \underline{\underline{3/10}} \quad \text{da } x \rightarrow \infty$$

7.

$$f(x) = \sin(x) / \exp(\sin(x))$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot \exp(\sin(x)) - \sin(x) \cdot \exp(\sin(x)) \cdot \cos(x)}{(\exp(\sin(x)))^2}$$

$$= \frac{\cancel{\exp(\sin(x))} \cos(x) \cdot (1 - \sin(x))}{(\exp(\sin(x)))^2}$$

$$= \frac{\cos(x)}{\exp(\sin(x))} - \frac{1}{2} \frac{\sin(2x)}{\exp(\sin(x))}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{-\sin(x) \cdot \cancel{\exp(\sin(x))} - \cos(x) \cdot \cancel{\exp(\sin(x))} \cos(x)}{(\exp(\sin(x)))^2}$$

$$- \frac{1}{2} \frac{2 \cos(2x) \cancel{\exp(\sin(x))} - \sin(2x) \cancel{\exp(\sin(x))} \cos(x)}{(\exp(\sin(x)))^2}$$

$$= - \frac{\sin(x) + \cos^2(x)}{\exp(\sin(x))} - \frac{1}{2} \frac{2 \cos(2x) - \sin(2x) \cos(x)}{\exp(\sin(x))}$$

$$\Rightarrow f''(\pi/4) = - \frac{1/\sqrt{2} + 1/2}{\exp(1/\sqrt{2})} - \frac{1}{2} \frac{2 \cdot 0 - 1 \cdot 1/\sqrt{2}}{\exp(1/\sqrt{2})}$$

$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) / e^{1/\sqrt{2}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{-2 - \sqrt{2} + 1}{2\sqrt{2} \exp(1/\sqrt{2})} = -\frac{(1 + \sqrt{2})}{(2\sqrt{2} e^{1/\sqrt{2}})}}}$$

8.

$$f(x) = 5 \sin(\pi \ln(1+x))$$

$$\Rightarrow f'(x) = 5 \cos(\pi \ln(1+x)) \cdot \frac{\pi}{1+x}$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{då} \quad \cos(\pi \ln(1+x)) = 0$$

$$\pi \ln(1+x) = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$\ln(1+x) = \frac{1}{2} + n$$

$$x+1 = \exp\left(\frac{1}{2} + n\right)$$

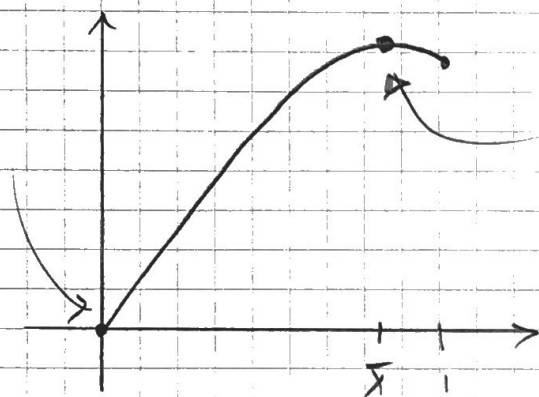
$$x = \exp\left(\frac{1}{2} + n\right) - 1$$

$$x \in (0, 1) \quad \text{då} \quad n = 0$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \exp\left(\frac{1}{2}\right) - 1 \quad \text{stationär punkt}$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) > 0$$



Maximum i \bar{x}

$$f(\bar{x}) = 5 \sin\left(\pi \ln\left(1 + \exp\left(\frac{1}{2}\right) - 1\right)\right) = 5 \sin\left(\pi/2\right) = \underline{\underline{5}}$$

9.

$$f(x) = (2 \exp(x))^3 = 8 \exp(3x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 24 \exp(3x)$$

$$\Rightarrow f''(x) = 72 \exp(3x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(2) = 8 \exp(6) \\ f'(2) = 24 \exp(6) \\ f''(2) = 72 \exp(6) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P_2(3) &= 8 \exp(6) + 24 \exp(6) \cdot (3-2) + \frac{1}{2} \cdot 72 \exp(6) \cdot (3-2)^2 \\ &= (8 + 24 + 36) \exp(6) = \underline{\underline{68 \exp(6)}} \end{aligned}$$

10.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^3}{k+8k^4+2} (3x+5)^k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k \cdot 3k^3}{k+8k^4+2} \left(x + \frac{5}{3}\right)^k$$

$$= a_k$$

$$\Rightarrow \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{3^{k+1} \cdot 3(k+1)^3}{k+1+8(k+1)^4+2} \bigg/ \frac{3^k \cdot 3k^3}{k+8k^4+2}$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{k+1}{k}\right)^3 \cdot \frac{k+8k^4+2}{k+8(k+1)^4+3}$$

$\rightarrow 3$ da $k \rightarrow \infty$

\therefore Svar: 1/3

11.

$$f(x) = 5x^2 - 10x + 2$$

$$g(x) = x + \alpha f(x) = x + 0.2 \cdot (5x^2 - 10x + 2)$$

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = g(x_0) = 1 + 0.2 \cdot (5 - 10 + 2) = 1 - 0.6 = 0.4$$

$$x_2 = g(x_1) = 0.4 + 0.2 \cdot (5 \cdot 0.16 - 4 + 2)$$

$$= 0.4 + 0.2 \cdot (0.8 - 2) = 0.4 - 0.2 \cdot 1.2$$

$$= 0.4 - 0.2 - 0.04 = \underline{\underline{0.16}} = \underline{\underline{4/25}}$$

12.

$$f(x) = 5x^2 - 10x + 2$$

$$\Rightarrow f'(x) = 10x - 10$$

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = 0 - (0 - 0 + 2) / (0 - 10) = 2/10 = 1/5$$

$$x_2 = 1/5 - (5 \cdot (1/5)^2 - 10 \cdot (1/5) + 2) / ((1/5) - 10) =$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{5} / (-8) = \frac{1}{5} \cdot \frac{9}{8} = \underline{\underline{9/40}} = 0.225$$

Del C

1. 10 iterationer

$$\left. \begin{array}{l} x = 3 \\ x = 3 \cdot 2 \\ x = 3 \cdot 2 \cdot 2 \dots \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow x = \underline{\underline{3 \cdot 2^{10}}} = 3 \cdot 1024 = \underline{\underline{3072}}$$

2. Maclaurinutveckling av $\sin(x)$ i $x = 0.5$

$$\dots \underline{\underline{\sin(0.5)}}$$