

TMV225 Inledande matematik M

Svarsblankett

Tentamenskod: _____

Del A (12 x 3p = 36p)

	Svar	Poäng (0/1)
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
	Summa	
	× 3 =	

Del B (4 x 2p = 8p)

	Svar	Poäng (0/1)
1		
2		
3		
4		
	Summa	
	× 2 =	

Del C (2 x 3p = 6p)

	Svar	Poäng (0/1)
1		
2		
	Summa	
	× 3 =	

Denna del fylls i av examinator!

Del A (räkneuppgifter)	
Del B (teorifrågor)	
Del C (programmering)	

Summa tentamen	
Bonuspoäng	
Totalsumma	

TMV225 Inledande matematik M

Instruktioner

Tentamen består av tre delar.

- Del A: Räkneuppgifter ($12 \times 3p = 36p$)
- Del B: Teoriuppgifter ($4 \times 2p = 8p$)
- Del C: Programmeringsuppgifter ($2 \times 3p = 6p$)

Tillsammans ger dessa uppgifter maximalt 50p. Till detta läggs de bonuspoäng (maximalt 10p) som tjänats ihop under kursen gång. Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet.

Svar måste anges i rätt ruta på svarsblanketten!

Lämna ej in lösningar eller kladdpapper!

Några tips och generella regler:

- Gör först de uppgifter som du tycker är lätta.
- Dubbelkolla dina svar (räkna om möjligt varje uppgift igen).
- Alla svar skall ges på enklast möjliga form (förenkla).

Lycka till!

Anders

TMV225 Inledande matematik M

Tentamensuppgifter

Del A: Räkneuppgifter

1. Låt $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ och $C = \{3, 4, 5\}$. Bestäm mängden $(A \cap B) \setminus C$.
2. Bestäm minsta x så att $|3x - 3| \leq 5x$.
3. Bestäm värdemängden för $f(x) = |\sin(2x)/x|$.
4. Bestäm lösningen till ekvationen $2 \exp(x) = e + \sqrt{\exp(x+1)}$.
5. Bestäm (bästa) Lipschitz-konstanten för $f(x) = \ln(1/x)$ på $I = [\epsilon^2, 1]$.
6. Bestäm gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} (4^x - 1)/x$.
7. Beräkna derivatan av $f(x) = 3 \ln(\sin(\exp(x)))$ i $x = \ln(\pi/3)$.
8. Beräkna linjäriseringen av $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ runt $\bar{x} = 0.5$ i $x = 3$.
9. Beräkna andra ordningens Taylorpolynom för $f(x) = 2 \sin(x) \cos(x)$ runt $\bar{x} = \pi$ i $x = 6\pi$.
10. Bestäm konvergensradien för potensserien $1 + \frac{3}{4}x + x^2 + \frac{27}{16}x^3 + \frac{81}{25}x^4 + \dots$
11. Beräkna en approximativ lösning till $x^2 = 3$ genom att utföra två iterationer med bisektionsmetoden på intervallet $[1, 2]$ (beräkna \hat{x}_2).
12. Beräkna en approximativ lösning till $x^2 = 3$ genom att utföra två iterationer med Newtons metod med startgissning $x_0 = 1$ (beräkna x_2).

Del B: Teoriuppgifter

1. Vad kallas en mängds minsta övre begränsning?
2. Vad kallas en funktion som är såväl injektiv som surjektiv?
3. Vad är definitionsmängden för arcsin?
4. Vad kallas en punkt där en funktion går från att vara konvex till konkav (eller omvänt)?

Del C: Programmeringsuppgifter

1. Vilket värde har variabeln x vid programmets slut?

MATLAB code

```
1 x = 0;
2 for k = 1:100
3     x = x + 2*k/100;
4 end
```

2. Vilket tal beräknar programmet?

MATLAB code

```
1 x = 1;
2 TOL = 1e-12;
3 dx = 2*TOL;
4 while abs(dx) > TOL
5     dx = x*(1 - 0.1*x) + 0.2 - x;
6     x = x + dx;
7 end
```

TMV225 Inledande matematik M

Svarsblankett

Tentamenskod: Obs!

Del A (12 x 3p = 36p)

	Svar	Poäng (0/1)
1	{2}	1
2	3/8	1
3	[0, 2)	1
4	1	1
5	1/ε ²	1
6	2 ln 2	1
7	π / √3	1
8	12	1
9	10 π	1
10	1/3	1
11	13/8	1
12	7/4	1
	Summa	12
	× 3 =	36

Del B (4 x 2p = 8p)

	Svar	Poäng (0/1)
1	supremum	1
2	bijektiv	1
3	[-1, 1]	1
4	inflexionspunkt	1
	Summa	4
	× 2 =	8

Del C (2 x 3p = 6p)

	Svar	Poäng (0/1)
1	101	1
2	√2	1
	Summa	2
	× 3 =	6

Denna del fylls i av examinator!

Del A (räkneuppgifter)	36
Del B (teorifrågor)	8
Del C (programmering)	6

Summa tentamen	50
Bonuspoäng	10
Totalsumma	60

Bra! :-)

2018-10-19

EXEMPELTENTA 2018

(Del A)

1.

$$(A \cap B) \setminus C = (\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\}) \setminus \{3, 4, 5\} = \underline{\underline{\{2\}}}$$
$$= \{2, 3\}$$

2.

$$|3x - 3| \leq 5x$$

Fall 1: $x < 1$

$$-(3x - 3) \leq 5x$$

$$3 \leq 8x$$

$$x \geq 3/8 \quad \text{ou}$$

(Fall 2: $x \geq 1$)

↑ större än 3/8

∴ Svar: 3/8

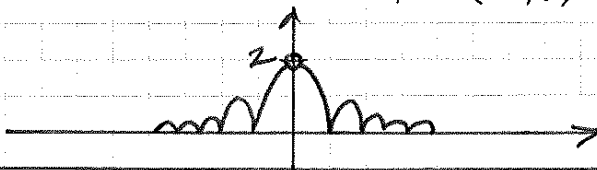
3.

$$f(x) = |\sin(2x) / x|$$

$$= 2 \cdot \left| \frac{\sin(2x)}{(2x)} \right|$$

2 då $x \rightarrow 0$

0 då $x \rightarrow \infty$



Svar: [0, 2)
↑ antas ej (men gränsvärde i $x=0$)
↑ antas, exempelvis i $x=\pi/2$

4.

$$2 \exp(x) = e + \sqrt{\exp(x+1)}$$

$$= (e^{x/2})^2$$

$$= (e^x \cdot e)^{1/2} = e^{x/2} \cdot e^{1/2}$$

Låt $t = e^{x/2}$

$$\Rightarrow 2t^2 = e + t \cdot \sqrt{e}$$

$$t^2 - \frac{\sqrt{e}}{2} t - \frac{e}{2} = 0$$

$$t = \frac{\sqrt{e}}{4} + \sqrt{\frac{e}{4^2} + \frac{8e}{4^2}} = \frac{\sqrt{e}}{4} + \frac{\sqrt{e} \cdot 3}{4} = \frac{4\sqrt{e}}{4} = \sqrt{e}$$

↑ $t > 0$

$$t = \sqrt{e} = e^{x/2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x=1}}$$

5.

$$f(x) = \ln(1/x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = (1/x)^{-1} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-x}{x^2} = -\frac{1}{x}$$

$$\text{Alt: } f(x) = -\ln x \Rightarrow f'(x) = -1/x$$

$$L_f = \sup_{[\varepsilon^2, 1]} |f'| = \sup_{[\varepsilon^2, 1]} 1/x = \underline{\underline{1/\varepsilon^2}}$$

6.

$$\frac{4^x - 1}{x} = \frac{e^{(\ln 4) \cdot x} - 1}{x} \xrightarrow{\text{L'Hôpital da } x \rightarrow 0} \frac{\ln 4 \cdot e^{(\ln 4) \cdot x}}{1}$$

$$= \ln 4 = \underline{\underline{2 \ln 2}}$$

7.

$$f(x) = 3 \ln(\sin(\exp(x)))$$

$$\Rightarrow f'(x) = \left(3 / (\sin(\exp(x))) \right) \cdot \cos(\exp(x)) \cdot \exp(x)$$

$$\Rightarrow f'(\ln(\pi/3)) = \left(3 / \sin(\pi/3) \right) \cdot \cos(\pi/3) \cdot \pi/3$$

$$= \pi \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\pi/\sqrt{3}}}$$

8.

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

(geom. serie)

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{(1-x)^2} \cdot (-1) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow L_f(x) = \frac{1}{1-0.5} + \frac{1}{(1-0.5)^2} \cdot (x-0.5)$$

$$= 2 + 4 \cdot (x-0.5)$$

$$\Rightarrow L_f(3) = 2 + 4 \cdot 2.5 = \underline{\underline{12}}$$

9. $f(x) = 2 \sin(x) \cdot \cos(x) = \sin(2x)$

$\Rightarrow f'(x) = 2 \cos(2x)$

$\Rightarrow f''(x) = -4 \sin(2x)$

$\bar{x} = \pi$

$f = 0$

$f' = 2$

$f'' = 0$

$\Rightarrow P_2(x) = 0 + 2 \cdot (x - \pi) + 0 = 2 \cdot (x - \pi)$

$\Rightarrow P_2(6\pi) = 2 \cdot 5\pi = \underline{\underline{10\pi}}$

10. $a_k = \frac{3^k}{(k+1)^2}$

$\Rightarrow \frac{a_{k+1}}{a_k} = \left(\frac{3^{k+1}}{(k+2)^2} \right) / \left(\frac{3^k}{(k+1)^2} \right)$
 $= 3 \cdot \left(\frac{k+1}{k+2} \right)^2 \rightarrow 3 \text{ da } k \rightarrow \infty$

$\Rightarrow R = \underline{\underline{1/3}}$

11. $f(x) = x^2 - 3$

- $x_0 = 1$	- $\hat{x}_0 = 1.5$ $x_1 = 1.5$	+ $\hat{x}_1 = 1.75$ $x_1 = 1.75$	+ $\hat{x}_0 = 2$ $x_1 = 2$
---------------------	--	--	--

$1.75^2 - 3 = \left(\frac{7}{4}\right)^2 - 3 = \frac{49 - 48}{16} = \frac{1}{16} > 0$

$\hat{x}_2 = 0.5 \cdot (1.5 + 1.75) = \underline{\underline{1.625}} = 13/8$

12. $f(x) = x^2 - 3 \Rightarrow f'(x) = 2x$

$x_0 = 1$

$x_1 = 1 - (1^2 - 3) / 2 = 1 + 2 / 2 = 2$

$x_2 = 2 - (2^2 - 3) / 4 = 2 - 1 / 4 = \underline{\underline{1.75}} = 7/4$

(De1C)

1.

$$\sum_{k=0}^{100} \frac{2k}{100} = \frac{2}{100} \cdot \sum_{k=0}^{100} k = \frac{2}{100} \cdot \frac{(0+100) \cdot 101}{2}$$
$$= \underline{\underline{101}}$$

2. Fixpunktsiteration för lösning av $x^2 = 2$

$$x = x \cdot (1 - 0.1 \cdot x) + 0.2$$

$$\Leftrightarrow x = x - 0.1 \cdot x^2 + 0.2$$

$$\Leftrightarrow 0.1 x^2 = 0.2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2$$

$$\therefore \text{Svar: } \underline{\underline{\sqrt{2}}}$$
