MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Anders Logg, tel. 031–772 5346
Telefonvakt: Jimmy Aronsson, tel. 031–772 5325

TMV225 2019
2019–01–09 kl. 08.30–12.30 (SB Multi)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV225 Inledande matematik M

Svarsblankett

Tentamenskod: ____________________

Del A (12 x 3p = 36p)

	Svar	Poäng (0/1)
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
	Summa	
	$\times$ **3** =	

Del B (4 x 2p = 8p)

	Svar	Poäng (0/1)
1		
2		
3		
4		
	Summa	
	$\times$ **2** =	

Del C (2 x 3p = 6p)

	Svar	Poäng (0/1)
1		
2		
	Summa	
	$\times$ **3** =	

Denna del fylls i av examinator!

Del A (räkneuppgifter)	
Del B (teorifrågor)	
Del C (programmering)	

Summa tentamen	
Bonuspoäng	
Totalsumma	

Chalmers tekniska högskola
Examinator: Anders Logg, tel. 031–772 5346
Telefonvakt: Jimmy Aronsson, tel. 031–772 5325
2019–01–09 kl. 08.30–12.30 (SB Multi)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV225 Inledande matematik M

Instruktioner

Tentamen består av tre delar:

- Del A: Räkneuppgifter (12×3p $= 36$p)
- Del B: Teorifrågor (4×2p $= 8$p)
- Del C: Programmering (2×3p $= 6$p)

Tillsammans ger dessa uppgifter maximalt 50p. Till detta läggs de bonuspoäng (maximalt 10p) som tjänats ihop under kursen gång. Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet.

Svar måste anges i rätt ruta på svarsblanketten!

Lämna ej in lösningar eller kladdpapper!

Några tips och generella regler:

- Gör först de uppgifter som du tycker är lätta.
- Dubbelkolla dina svar (räkna om möjligt varje uppgift flera gånger).
- Alla svar skall ges på enklast möjliga form (förenkla).

Lycka till!

Anders

TMV225 Inledande matematik M

Tentamensuppgifter

Del A: Räkneuppgifter

1. Låt $A = \{1, 2, \ldots, 100\}$ och $B = \{1, 2, \ldots, 97\}$. Bestäm mängden $(A \cap \emptyset) \cup (A \setminus B)$.

2. Bestäm minsta positiva heltalet x så att $4x^2 - 9 > 0$.

3. Bestäm (största) definitionsmängden för $f(x) = \ln(1 - 2x)/\sin(2x)$.

4. Bestäm värdet av $\sin(\arctan(0.25))$.

5. Bestäm om möjligt (bästa) Lipschitz-konstanten för $f(x) = \sin(2x + 1)$ på $I = [0, 1]$.

6. Bestäm gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \cos(x - \pi/2)/(\pi x)$.

7. Beräkna andraderivatan av $f(x) = (\sin(x))^2 - (\cos(x))^2$ i $x = \pi/8$.

8. Bestäm största värdet av $f(x) = (1 - \sin(\pi x/2)) \sin(\pi x/2)$ på intervallet $[0, 1]$.
Ledning: Sätt $t = \sin(\pi x/2)$.

9. Beräkna andra ordningens Taylorpolynom för $f(x) = \ln(x + 2)$ runt $\bar{x} = -1$ i $x = 0$.

10. Bestäm konvergensradien för serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x+2}{2}\right)^n$.

11. Beräkna en approximativ lösning till $x^2 = 25$ genom att utföra tre iterationer med bisektionsmetoden på intervallet $[0, 40]$ (beräkna $\hat{x}_3$).

12. Beräkna en approximativ lösning till $x^2 = x^3$ genom att utföra två iterationer med Newtons metod med startgissning $x_0 = 2$ (beräkna x_2).

Del B: Teorifrågor

1. Vad kallas en talföljd $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ som uppfyller att $|x_m - x_n| \to 0$ då $m, n \to \infty$?

2. Hur betecknas sammansättningen av två funktioner f och g?

3. Ange standardgränsvärdet $\lim_{x\to 0+} x^x$.

4. Ange första ordningens Maclaurinpolynom för $f(x) = \sin(x)$.

Del C: Programmering

1. Vilket värde har variabeln `x` vid programmets slut?

MATLAB code

```
x = 0;
a = 1;

for k = 1:10
    x = x + a;
    a = a / 2;
end
```

2. Vilket tal beräknar programmet?

MATLAB code

```
x = 2;

for k = 1:100
    x = x - 0.01*(x^3 - 5);
end
```

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Anders Logg, tel. 031–772 5346
Telefonvakt: Jimmy Aronsson, tel. 031–772 5325

TMV225 2019
2019–01–09 kl. 08.30–12.30 (SB Multi)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV225 Inledande matematik M

Svarsblankett

Tentamenskod: ____________________

Del A (12 x 3p = 36p)

	Svar	Poäng (0/1)
1	$\{98, 99, 100\}$	
2	2	
3	$(-\infty, \frac{1}{2}) \setminus \{\frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}\}$	
4	$1/\sqrt{17}$	
5	$2 \cdot \lvert\cos(3)\rvert$	
6	$1/\pi$	
7	$2\sqrt{2}$	
8	$1/4$	
9	$1/2$	
10	2	
11	5	
12	$6/5$	
	Summa	
	$\times$ **3 =**	

Del B (4 x 2p = 8p)

	Svar	Poäng (0/1)
1	Cauchy-följd	
2	$f \circ g$	
3	1	
4	x	
	Summa	
	$\times$ **2 =**	

Del C (2 x 3p = 6p)

	Svar	Poäng (0/1)
1	$2 - 2^{-9}$	
2	$\sqrt[3]{5}$	
	Summa	
	$\times$ **3 =**	

Denna del fylls i av examinator!

Del A (räkneuppgifter)	
Del B (teorifrågor)	
Del C (programmering)	

Summa tentamen	
Bonuspoäng	
Totalsumma	

TENTA 2019-01-09

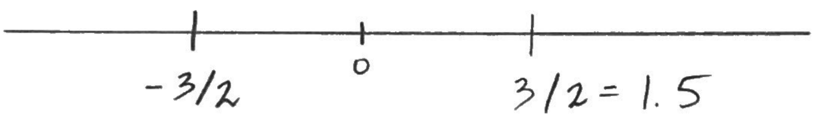
1 $\quad \underbrace{(A \cap \emptyset)}_{=\emptyset} \cup (A \setminus B) = A \setminus B = \{98, 99, 100\}$

---

2. $\quad 4x^2 - 9 > 0$

$\iff (2x+3)\cdot(2x-3) > 0$

$\iff (x - (-3/2))\cdot(x - 3/2) > 0$



Båda faktorerna positiva eller båda negativa.

$\therefore$ Antingen $x > 3/2$ eller $x < -3/2$.

Minsta positiva heltal: $\underline{x = 2}$

(Alternativ: testa $x = 1, x = 2, \ldots$)

---

3. $\quad f(x) = \ln(1-2x) \,/\, \sin(2x)$

1) $\quad 1 - 2x > 0 \iff 2x < 1 \iff x < 1/2$

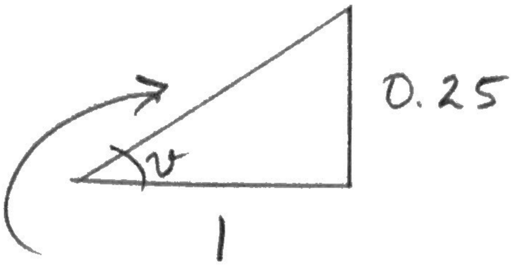
2) $\quad \sin(2x) \neq 0 \iff 2x \neq \pi n$

$\iff x \neq \pi n/2$

$\therefore \; D(f) = (-\infty, 1/2) \setminus \{\pi n/2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$

Alt. $\{-\pi n/2 \mid n \in \mathbb{N}\}$

4.



$$\sqrt{1+0.25^2} = \sqrt{1+1/16} = \sqrt{17}/4$$

$$\therefore \quad \sin(v) = \frac{1/4}{\sqrt{17}/4} = \underline{\underline{1/\sqrt{17}}}$$

5.

$$f(x) = \sin(2x+1)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2\cos(2x+1)$$

$$\Rightarrow f''(x) = -4\sin(2x+1)$$

$$L_f = \max|f'|$$

Bestäm kritiska punkter för f':

$$0 = f''(x) = -4\sin(2x+1)$$

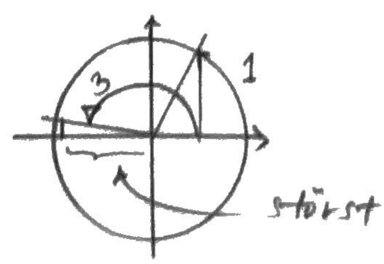
$$\Leftrightarrow \quad \sin(2x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x+1 = \pi n$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi n - 1}{2} \notin [0,1]$$

$\therefore$ Saknas kritiska punkter på $[0,1]$

$\Rightarrow$ Maximum i ändpunkt



$$f'(0) = 2\cos(1)$$

$$f'(1) = 2\cos(3)$$

$$\therefore \quad L_f = \max|f'| = \underline{\underline{2|\cos(3)|}}$$

6.

$$\frac{\cos(x-\pi/2)}{\pi x} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin(\pi/2-(x-\pi/2))}{x}$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin(\pi-x)}{x} = \frac{1}{\pi}\cdot\underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\to 1} \to \underline{\underline{\frac{1}{\pi}}} \text{ då } x\to 0$$

7.

$$f(x) = \sin^2(x) - \cos^2(x)$$

$$= -(\cos^2(x) - \sin^2(x))$$

$$= -\cos(2x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2\sin(2x)$$

$$\Rightarrow f''(x) = 4\cos(2x)$$

$$\Rightarrow f''(\pi/8) = 4\cos(\pi/4) = 4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{2\sqrt{2}}}$$

8.

$$f(x) = (1-\sin(\pi x/2))\cdot\sin(\pi x/2)$$

$f(0) = f(1) = 0 \Rightarrow$ inre extrempunkt

(ty $f(x) > 0$ på $(0,1)$)

Låt $t = \sin(\pi x/2)$ och sätt

$$g(t) = f(x) = (1-t)\cdot t$$

Maximum för $t = 1/2$.

$$\therefore \max f = \max g = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

9

$$f(x) = \ln(x+2), \quad f(-1) = \ln(1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = 1/(x+2), \quad f'(-1) = 1$$

$$\Rightarrow \quad f''(x) = -1/(x+2)^2, \quad f''(-1) = -1$$

$$\Rightarrow \quad P_2(x) = 0 + 1\cdot(x-(-1)) - \tfrac{1}{2}\cdot(x-(-1))^2$$

$$= (x+1) - (x+1)^2/2$$

$$\Rightarrow \quad P_2(0) = 1 - 1/2 = \underline{\underline{1/2}}$$

10.

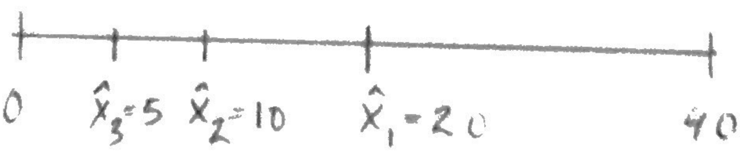
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x+2}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n2^n}}_{a_n} \cdot (x-(-2))^n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/((n+1)\,2^{n+1})}{1/(n\cdot 2^n)} = \frac{n\,2^n}{(n+1)\,2^{n+1}}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \text{ då } n \to \infty$$

$$\therefore \quad \underline{\underline{R = 2}}$$

11



$$\therefore \quad \underline{\underline{\hat{x}_3 = 5}} \quad \text{(exakt lösning)}$$

12.

$$f(x) = x^2 - x^3$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x - 3x^2$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - x_n^3}{2x_n - 3x_n^2}$$

$$x_0 = 2$$

$$x_1 = 2 - \frac{2^2 - 2^3}{2^2 - 3 \cdot 2^2} = 2 - \frac{4-8}{4-12}$$

$$= 2 - \frac{4}{8} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{3}{2} - \frac{9/4 - 27/8}{3 - 3 \cdot 9/4}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{18-27}{24-54} = \frac{3}{2} - \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{10}{\cancel{30}}} = \frac{15-3}{10}$$

$$= 12/10 = \underline{\underline{6/5}}$$