Laboration nr 3 (J.L. juni 97)

Välj ut två av ekvationerna i bifogade förteckning och studera dem.

1. Betrakta följande allmänna version av Volterra-Lotkas jägar-byte modell:

$$\begin{cases} y_1' = & (1 - p_1 y_2) y_1 - q_1 y_1^2, \\ y_2' = & (-1 + p_2 y_1) y_2 - q_2 y_2^2 \end{cases}$$

   Undersök med hjälp av datorn sådana parameterval för vilka $(1,1)$ är en asymptotiskt stabil jämviktspunkt! Vilka parametervärden ger stabilitet men inte asymptotisk stabilitet?

2. **Relativistiska planetbanor**
   Enligt Einsteins relativitetsteori är den kraft som påverkar en kropp med massan m och hastigheten $\mathbf{v}$ lika med

$$\frac{m\mathbf{v}'}{(1 - \frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2})^{3/2}}$$

   Här är c ljushastigheten. Den relativistiska ekvationen för tvåkropparsproblemet (med koordinatsystemets origo placerat i den ena kroppen) är då

$$\frac{m\mathbf{v}'}{(1 - \frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2})^{3/2}} = -\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}$$

   vilket ger systemet

$$m\mathbf{x}'' = -\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}\left(1 - k|\mathbf{x}'|^2\right)^{3/2}$$

   där $k = 1/c^2$. Antag nu att rörelsen sker i ett plan så att $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Tag $m = 1$ och rita ut banorna dels i fallet $k = 0$, (som ger planetbanor enligt Newton) och för några positiva värden på k. (Tag små värden, men inte för små, för då syns inget.)

3. **Ett begränsat trekropparsproblem**
   Betrakta två tunga kroppar och en mycket lätt kropp, vars dragningskraft på de två tunga kropparna kan försummas. De två tunga kropparnas rörelse beskrivs då av 2-kropparsproblemet. Antag nu att alla tre kropparnas rörelse äger rum i ett plan och att man i detta plan inför ett rörligt koordinatsystem, där de två tunga kropparna ligger i punkterna $(-a, 0)$ resp. $(a, 0)$. Om m_1 och m_2 är de två tunga kropparnas massor blir Newtons ekvation för den lätta kroppen

$$(x'', y'') = -m_1 \frac{(x + a, y)}{r_1^3} - m_2 \frac{(x - a, y)}{r_2^3}$$

   där

$$r_1 = \sqrt{(x + a)^2 + y^2}, \;\; r_2 = \sqrt{(x - a)^2 + y^2}$$

   Studera den lätta kroppens dans! (Välj i första hand $m_1 = m_2 = 1$).

4. **Kommer mänskligheten att överleva?**
   Följande system är ett försök att beskriva spridning av en dödlig, långsam epidemi.

$$\begin{cases} x' = & -p_1 xy + p_2 x, \\ y' = & p_1 xy - p_3 y + p_4 y, \\ z' = & p_3 y - p_5 z. \end{cases}$$

Här är
$x =$ antalet oinfekterade
$y =$ antalet ej isolerade smittbärare
$z =$ antalet isolerade smittbärare
Undersök hur måste parametrarna förhålla sig till varandra för att totalpopulationen skall överleva? Är det möjligt att välja parametervärden så att epidemin endast drabbar en begränsad del (säg 20 procent) av befolkningen?

5. **Massor av spiraler**
Följande märkliga system uppfanns av några experimentsugna studenter på kursen:

$$\begin{cases} x' = & -p\sin(x) + q\cos(y^2) \\ y' = & r\sin(x) \end{cases}$$

Rita många banor som börjar första kvadranten. Varför blir det på detta viset?

6. **Kopplade fjädrar**
Två block är fästa med tre fjädrar. Den ena fjäder fäster det ena blocket i en vägg, den andra fäster det andra blocket i en motstående vägg och den tredje fäster de båda blocken i varandra. Om x_1 och x_2 är de två blockens avvikelse från sina respektive vilolägen och m_1, m_2 är blockens massor, beskrivs detta kopplade system av ekvationerna (förutsatt att man bortser från friktion)

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' = & \ -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2 x_2'' = & \ -k_3 x_2 - k_2(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

Studera blockens rörelser. Undersök också vad som händer om man tar med friktion i analysen.

7. **Dubbelpendeln**
En pendel hänger i en annan pendel, som i sin tur hänger i ett tak. Om man bortser från friktion och luftmotstånd och endast räknar med jordens dragningskraft kommer denna dubbelpendels rörelse att beskrivas av följande ekvation:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)\theta_1'' + m_2\theta_2'' + (m_1 + m_2) g \sin\theta_1 &= 0 \\ m_1\theta_1'' + m_2\theta_2'' + m_2 g \sin\theta_2 &= 0 \end{aligned}$$

Här antas båda pendlarna ha längden 1, medan m_1 och m_2 är respektive massor och θ_1 och θ_2 vinkelutslagen. Studera pendlarnas rörelser. Hur ser rörelserna ut om man lägger till lämpliga friktionstermer?

8. **Ekologiska nischer**
Följande system försöker beskriva samspelet mellan tre djurarter med populationsstorlekarna y_1, y_2, y_3:

$$\begin{cases} y_1' = & y_1 \cdot (1 - y_1 - a y_2 - b y_3) \\ y_2' = & y_2 \cdot (1 - b y_1 - y_2 - a y_3) \\ y_3' = & y_3 \cdot (1 - a y_1 - b y_2 - y_3) \end{cases}$$

Man kan se a och b som mått på samspelet mellan djurarterna. Små värden på dessa parametrar svarar mot litet samspel (varje djurart håller sig i stort sett till sin nisch), medan större värden svarar mot mer interaktion. En iakttagelse i naturen är att djurarter tenderar att söka sig till separata ekologiska nischer. Konfirmerar denna modell en sådan iakttagelse? Finn några positiva parametervärden för vilka alla arterna kan samexistera och några för vilka arterna inte kan leva samman. Undersök med datorns hjälp jämviktspunkter och deras egenskaper.

9. **En matematikers framgång och mardröm**
Matematikern Duffing hade en gång en svår natt. Ett virrvarr av kurvor snärjde honom och på morgonen när han vaknade hade de onda makterna placerat en märklig maskin på hans nattduksbord. Maskinens lilla metalltunga stod där och vibrerade på ett sätt som påminde honom om hans mardröm. Duffing insåg att de onda makterna hade byggt denna sataniska lilla apparat bara för att övertyga honom om att hans mardröm överträffades av verkligheten. Metalltungans rörelse beskrivs av följande ekvation, som senare gjort honom berömd:

$$x'' + \beta x' - x + x^3 = \mu \cos t$$

Rita några exempel på Duffings mardrömsbilder.
(Förslag på parametervärden: $\beta = 0.2, \mu = 0.3$. Prova fler!).
Rita par av banor med näraliggande startpunkter. Hur långt ifrån varandra ligger banornas slutpunkter?

10. **Hård fjäder mot yttre kraft. Vem vinner?**
Följande ekvation beskriver rörelsen hos ett block fäst med en hård fjäder.

$$x'' + ax' + x + bx^3 = k \cos t$$

Fjäderns hårdhet beskrivs av konstanten b. Två frågor är naturliga.

(a) Hur skiljer sig rörelsen från den vanliga mjuka fjädern, då $b = 0$.

(b) Kan man åstadkomma den typ av resonansfenomen som förekom i labbuppgift 1.2 om $b > 0$?

11. **Perversa modeller för friktion**
I den vanliga beskrivningen av rörelsen hos ett block fäst i en fjäder antar man att friktionen är proportionell mot hastigheten. Här gäller det att studera andra kanske tänkbara modeller för att beskriva friktionen. Antag att friktionen i stället är $f(x')$. Man får då ekvationen

$$x'' + f(x') + bx = 0$$

(inga yttre krafter). I standardmodellen har man $f(u) = au$. Testa hur rörelsen hos blocket påverkas med olika andra val av funktion f. Ett djärvt förslag som bör prövas är $f(u) = a\,\mathrm{sign}(u)$, där

$$\mathrm{sign}(u) = \begin{cases} 1 & \text{om } u > 0 \\ 0 & \text{om } u = 0 \\ -1 & \text{om } u < 0 \end{cases}$$

(Varför vänder sig Picard i sin grav?)
Varning: Datorn kan ta tid på sig i denna uppgift. Välj därför inte ett stort värde på stoppTid i “pars.m”. Man kan skynda på datorn genom att sänka beräkningstoleransen genom att med kommandot *steg* sätta den numeriska toleransen = 1e-4.

12. **Jämvikt i förvandling**
Studera ekvationen
$$x'' + (x-1)x^2 = p$$
och undersök hur jämviktspunkterna varierar vad avser stabilitetsegenskaper med parametervärden varierande från -0.1 till $+0.1$.

13. **Konsten att förorena naturen med måtta**
Ett sjösystem består av tre sjöar, Storsjön, Lillsjön och Lagomsjön. Vid Storsjön ligger numera ett pampigt reningsverk och vid Lillsjön låg till helt nyligen en oansenlig industri. Lagomsjön omsluts av ett ljuvligt naturskyddsområde. Under tio års tid har industrin släppt ut det giftiga ämnet polyfyphan i Lillsjön. I dag har industrin slagit igen och reningsverket tagits i drift. Om x_1,x_2 och x_3 är mängden polyfyphan vid tiden t i sjöarna Lillsjön, Storsjön resp. Lagomsjön så anser man sig veta att
$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$$
där
$$A = \begin{bmatrix} -0.10 & 0.10 & 0.04 \\ 0.10 & -0.15 & 0.00 \\ 0.00 & 0.05 & -0.04 \end{bmatrix}$$
Termen $\mathbf{b}$ svarar mot utsläppet under de första 10 åren och reningen som följer därefter, så att
$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix} \text{ om } 0 \leq t < 10$$
$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.00 \\ -0.1x_2 \\ 0.00 \end{bmatrix} \text{ om } 10 \leq t$$
Beskriv utvecklingen av polyfyphan i Lagomsjön fram till i dag och i framtiden.

14. **Pendeln med periodisk yttre kraft**
Följande ekvation beskriver en pendel som utsätts för en yttre periodisk yttre kraft:
$$x'' + cx' + \sin x = F\cos t$$
Studera pendelrörelsen för olika parametervärden.
(Exempelvis F omkring 3, c cirka 0.2).
Rita par av banor med näraliggande startpunkter. Hur långt ifrån varandra ligger banornas slutpunkter?

15. **Katter på råttan, råttan på repet**
Följande sytem är ett försök att beskriva samspelet mellan tre djurarter, där x jagas av y som i sin tur jagas av z. Parametrarna är valda så att (1,1,1) är en jämviktspunkt, men det finns fler.
$$\begin{cases} x' = & p_1(1-y)x, \\ y' = & (p_2 + p_3 x - (p_2+p_3)z)y, \\ z' = & p_4(-1+y)z. \end{cases}$$
Bestäm alla jämviktspunkter i den öppna första oktanten $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$. Rita fasporträtt i olika plan och även i rummet (med hjälp av kommandot *tredim*). Undersök med datorns hjälp stabilitetsegenskaperna hos jämviktspunkten $(1,1,1)$.