MATEMATIK
Göteborgs universitet

Datum: 980604, kl. 8.45 - 13.45
Hjälpmedel: inga
Telefonvakt: Niklas Lindholm, 0740 - 479626

Tentamensskrivning för FIN 120, (Matematisk och Fysikalisk modellering)

---

1. Låt A vara en $n \times n$ matris som är diagonaliserbar.

   a) Visa att det linjära systemet (3p)

   $$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{c}$$

   har en entydig lösning som kan uttryckas med hjälp av egenvärden och egenvektorer som hör till matrisen A.

   b) I fallet $n = 2$, beskriv dom olika typer av fasporträtt som är möjliga om egenvärdena till A är komplexvärda. (Rita figurer och motivera kortfattat). (2p)

2. Antag att funktionen f är Lipschitzkontinuerlig. (3p)

   Visa att systemet $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{c}$ har en entydig lösning.

3. Antag att $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ är en jämviktspunkt och att $E(\mathbf{x})$ är en Liapunovfunktion till systemet $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$ i ett område Ω som innehåller origo.

   a) Vilka egenskaper har funktionen $E(\mathbf{x})$? (1p)

   b) Visa att under ovanstående förutsättningar så måste origo vara en stabil jämviktspunkt. (3p)

4. Beskriv kontrollproblemet för ett linjärt system med kvadratisk kostnad. (4p)

   Visa att den optimala kontrollen u^* är en kontroll baserad på återkoppling.

5. a) I uppgift 1 ovan låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. (3p)

   Bestäm lösningen $\mathbf{x}(t)$.

   b) Visa att följande system har en Hopf-bifurkation för $\mu = 0$, (4p)

   $$\begin{cases} x' = y + x(\mu - (x^2 + y^2)^2) \\ y' = -x + y(\mu - (x^2 + y^2)^2) \end{cases}$$

   Beskriv, i en figur, fasporträttet då $\mu > 0$.

   c) Visa att det system som beskriver pendelns ekvation har en asymptotiskt stabil jämviktspunkt i origo. (3p)