MATEMATIK
Göteborgs universitet

Datum: 990831, kl. 8.45 - 13.45
Hjälpmedel: inga
Telefonvakt:

Tentamensskrivning för FIN 120, (Matematisk och Fysikalisk modellering)

---

1. Låt A vara en $n \times n$ matris.

a) Definiera e^{tA} och motivera väl varför $\boldsymbol{x}(t) = e^{tA}\boldsymbol{c}$ är en lösning till det linjära systemet $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{c}$.. (3p)

b) Beskriv i en figur fasporträttet för systemet (3p)

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} \quad \text{där} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Var noggrann med att märka ut separatister om det finns några.
Vilken typ av jämviktspunkt är $(0, 0)$?

2. a) Formulera och bevisa Grönwalls lemma. (3p)

b) Vad innebär det att funktionen f är Lipschitzkontinuerlig ? (3p)
Visa att om funktionen f är Lipschitzkontinuerlig så har systemet
$\boldsymbol{x}' = f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{c}$ en entydig lösning.

c) Vad kan man säga om det linjära systemet i uppgift 1a ? (1p)

3. Bestäm en Liapunovfunktion, i en omgivning till $(0, 0)$, till följande system (2p)

$$\begin{cases} x' = -y^3 \\ y' = x^3 - \dfrac{y^3}{3} \end{cases}$$

Är $(0, 0)$ en asymptotiskt stabil jämviktspunkt ?

4. a) Formulera Poincare-Bendixons sats. (1p)

b) Låt $\boldsymbol{x}(t)$ vara en lösning till $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ sådan att dess gränsmängd $\gamma^+ = \{\bar{\boldsymbol{x}}\}$, där $\bar{\boldsymbol{x}}$ är en jämviktspunkt. Visa att då är $\lim_{t \to \infty} \boldsymbol{x}(t) = \bar{\boldsymbol{x}}$. (3p)

5. Avgör om systemet nedan har en Hopf-bifurkation för $\mu = 0$ (3p)

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x - \left(\dfrac{y^3}{3} - \mu y\right) \end{cases}$$

6. Beskriv systemet för den inverterade pendeln med en återförande kraft. (4p)
Visa att det med linjär återkoppling är möjligt att erhålla ett stabilt system.
(Pendeln står rakt upp)

Lycka till /TG