1 Linjära system av ordning två

Ett linjärt system av ordning två har utseendet

$$\begin{cases} x_1' = p_1 x_1 + p_2 x_2 \\ x_2' = p_3 x_1 + p_4 x_2 \end{cases}$$

På matrisform skriver vi

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

där

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \text{ och } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}.$$

Låt λ_1 och λ_2 vara egenvärdena till matrisen $\mathbf{A}$, dvs lösningar till sekularekvationen $\det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}) = 0$.
Vi skall studera följande fall lite noggrannare:

1. $0 < \lambda_1 < \lambda_2$:
   (a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $\mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$

2. $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$:
   (a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $\mathbf{A} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -12 & 1 \\ 6 & -13 \end{pmatrix}$

3. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$:
   (a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ (b) $\mathbf{A} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -20 & 2 \end{pmatrix}$

4. $\lambda_1 = \lambda_2$:
   (a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ (b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$

5. Ett egenvärde är noll $(\lambda_1 = 0)$:
   (a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$.

6. Komplexa egenvärden, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$:
   (a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$