Kapitel 1

System av ordinära differentialekvationer

Vi skall här studera första ordningens homogena system av linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter. Huvudvikten läggs vid fallet att systemets matris är diagonaliserbar. Det generella fallet berörs endast översiktligt i sektion 4.3.

1.1 Inledande exempel

I detta kapitel skall vi studera ett allmänt system av ordinära differentialekvationer av formen

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t), \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \ldots + a_{2n}x_n(t), \\ \ldots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t), \end{cases} \tag{1.1}$$

där a_{ij} är konstanter och $0 < t < \infty$. Vi kommer ofta att anta att funktionerna $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ är givna vid (tiden) $t = 0$, så att

$$x_1(0) = c_1, x_2(0) = c_2, \ldots, x_n(0) = c_n. \tag{1.2}$$

För att göra det lättare att beskriva den allmäna teorin inför vi några naturliga beteckningar. Vi avstår till en början från att skriva ut variabeln t. Skriver vi x_1 avser vi alltså $x_1(t)$. Vidare inför vi matrisbeteckningar

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Systemet (3.1) kan då skrivas

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x},$$

medan begynnelsevillkoren (3.2) får formen $\boldsymbol{x}(0) = c$.

Exempel 1: (En tidskontinuerlig populationsmodell med två djurarter)

Låt $x = x(t)$ beskriva storleken vid tiden t av en djurart som är bytesdjur för en viss rovdjursart. Rovdjurspopulationens storlek beskrivs av funktionen $y = y(t)$. Vi skall nu ställa upp en enkel matematisk modell för samspelet mellan dessa två djurarter.

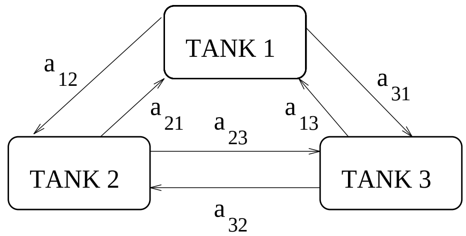
Vi antar att om rovdjursarten inte fanns så skulle bytesdjurens tillväxthastighet vara proportionell mot storleken av populationen bytesdjur, d.v.s. $x' = ax$. Närvaron av rovdjursarten minskar emellertid tillväxten. Vi antar att tillväxtminskningen är proportionell mot rovdjurspopulationens storlek så att $x' = ax - by$.

Utan bytesdjuren skulle rovdjursarten dö ut. Vi antar att $y' = -d \cdot y$ om $x = 0$. Men existensen av bytesdjur gör att rovdjursstamen kan växa till sig med en hastighet som är proportionell mot storleken av populationen bytesdjur. Vi antar således att $y' = cx - dy$.

Samspelet mellan de två djurarterna beskrivs således i denna modell av systemet

$$\begin{cases} x' = ax - by, \\ y' = cx - dy, \end{cases}$$

Exempel 2: Betrakta tre tankar som innehåller saltlösningar i olika koncentrationer. Vattnet kan flöda mellan tankarna. I följande diagram anger talen a_{jk} andelen salt som flödar från tank nr j till tank nr k (per tidsenhet).



Låt nu $x_j(t)$ vara saltmängden i tank j vid tiden t. Vi antar att saltmängden vid tiden $t = 0$ är känd i de tre tankarna, så att $x_j(0) = c_j$. Tillväxthastigheten för saltmängden i tank 1 är då

$$x_1' = -(a_{12} + a_{13})x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3.$$

På samma sätt är $x_2' = -(a_{21}+a_{23})x_2+a_{12}x_1+a_{13}x_3$ och $x_3' = -(a_{31}+a_{32})x_3+a_{13}x_1+a_{23}x_2$. Vi får alltså systemet

$$\left\{\begin{array}{lrrr} x_1' = & -(a_{12}+a_{13})x_1 & +a_{21}x_2 & +a_{31}x_3, \\ x_2' & a_{12}x_1 & -(a_{21}+a_{23})x_2 & +a_{32}x_3, \\ x_3' & a_{13}x_1 & +a_{23}x_2 & -(a_{31}+a_{32})x_3, \end{array}\right.$$

där

$$x_1(0) = c_1, x_2(0) = c_2, x_3(0) = c_3.$$

Exempel 3: Betrakta ett linjärt system av ordningen 2, d.v.s.

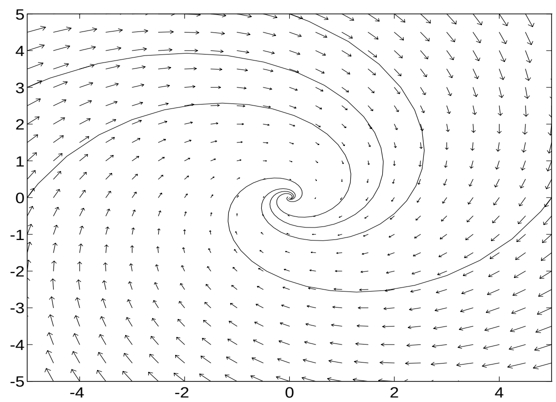
$$\left\{\begin{array}{l} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{array}\right.$$

Om man fixerar värdena vid tiden $t = 0$, så att

$$x_1(0) = c_1, x_2(0) = c_2,$$

så kommer $(x_2(t), x_2(t))$ att beskriva en kurva i planet med början i (c_1, c_2). Denna kurva har tangentriktningen $(x_1', x_2') = (a_{11}x_1 + a_{21}x_2, a_{21}x_1 + a_{22}x_2)$ i punkten (x_1, x_2). Genom att rita ut dessa tangentriktningar kan man få en uppfattning om hur lösningskurvorna ser ut. I figuren nedan har vi riktat ut riktningsfält och en lösningskurva för systemet

$$\begin{cases} x_1' = -0.5x_1 + x_2, \\ x_2' = -x_1 - 0.5x_2. \end{cases}$$



Exempel 4: En andra ordningens linjär differentialekvation $y'' + ay' + by = 0$ kan skrivas som ett första ordningens system. Sätt nämligen

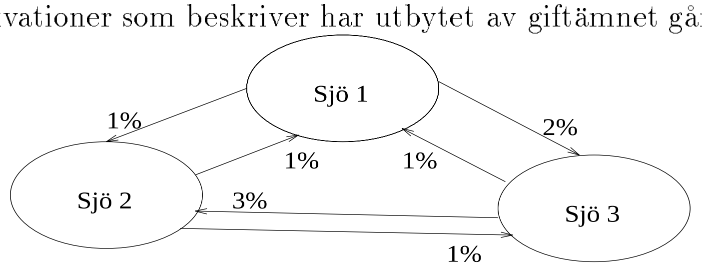
$$x_1 = y, \quad x_2 = y'.$$

Då är $x_1' = y' = x_2$ och $x_2' = y'' = -ay' - by$ d.v.s. $x_2' = -ax_1 - ax_2$. Alltså är

$$y'' + ay' + by = 0 \iff \begin{cases} x_1' = & x_2, \\ x_2' = & -bx_1 - ax_2. \end{cases}$$

Övningar (avsnitt 3.1)

1. Följande figur beskriver utbytet av ett giftämne mellan tre sjöar. Vid tiden $t = 0$ finns 100 kg av giftämnet i den första sjön. Skriv upp ett system av ordinära differentialekvationer som beskriver har utbytet av giftämnet går till.



2. Systemet

$$\begin{cases} x_1' = & x_2 \\ x_2' = & -x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

är ekvivalent med en andra ordningens linjär homogen differentialekvation. Utnyttja detta för att finna alla lösningar till systemet.

3. Antag att $n \times n$-matrisen A har egenvärdet 0. Visa att systemet $x' = Ax$ har minst en icke-trivial lösning som är konstant.

4. Skriv ekvationen $y''' + 2y'' + 3y'' + ry = 0$ som ett system genom at införa de nya funktionerna
$$x_1 = y,\ x_2 = y',\ x_3 = y''.$$

1.2 Systemet $x' = Ax$, A diagonaliserbar

Vi påminner läsaren om definitionen av egenvärden och egenvektorer till en matris A. Ett tal λ_0 (reellt eller komplext) är ett egenvärde till A om det finns en vektor $\boldsymbol{v}$ sådan att

$$A\boldsymbol{v} = \lambda_0 \boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}. \tag{1.3}$$

Varje sådan vektor $\boldsymbol{v}$ kallas en egenvektor till egen värdet λ_0. Systemet (3.3) är ekvivalent med det homogena systemet $(A - \lambda_0 I)\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Därför är λ_0 ett egenvärde då och endast då detta homogena system har en icke-trivial lösning. Det innebär att λ_0 är ett egenvärde då och endast då λ_0 är en rot till ekvationen

$$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{1.4}$$

(Läsaren har möjligen sett (3.4) skriven på formen $\det(\lambda I - A) = 0$, men det är bara en ekvivalent beskrivning ty $\det(\lambda I - A) = (-1)^n \det(A - \lambda I)$. Eftersom $\det(A - \lambda_0 I)$ är ett polynom av graden n så finns n rötter, d.v.s. n egenvärden, varav då vissa kan vara lika. Antag nu at $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ är egenvärdena till A. Till varje egenvärde ordnar vi då en egenvektor. Om $\boldsymbol{f}_j$ är en egenvektor till egenvärdet λ_j så gäller alltså

$$A\boldsymbol{f}_j = \lambda_j \boldsymbol{f}_j, \quad \boldsymbol{f}_j \neq 0.$$

Vi säger att A är *diagonaliserbar* om vi kan välja egenvektorerna $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ så att de bildar en bas i $\mathbb{R}^n$ kan då på ett entydigt sätt skrivas $\boldsymbol{x} = d_1\boldsymbol{f}_1 + \ldots + d_n\boldsymbol{f}_n$.

Sats 1 *Antag att A är diagonaliserbar med egenvärdena $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ och att $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ är en bas av motsvarande egenvektorer till A. Då kan varje lösning till systemet*

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$$

skrivas

$$\boldsymbol{x} = d_1 e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{f}_1 + d_2 e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{f}_2 + \ldots + d_n e^{\lambda_n t}\boldsymbol{f}_n,$$

där $d_1, d_2, \ldots, d_n$ är godtyckliga tal.

Bevis: Om $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ är en godtycklig vektor i $\mathbb{R}$ så kan vi på ett entydigt sätt skriva

$$\boldsymbol{x} = \xi_1(t)\boldsymbol{f}_1 + \xi_2(t)\boldsymbol{f}_2 + \ldots + \xi_n(t)\boldsymbol{f}_n.$$

Om nu $A\boldsymbol{f}_j = \lambda_j \boldsymbol{f}_j$ så är

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} &= \xi_1(t)A\boldsymbol{f}_1 + \xi_2(t)A\boldsymbol{f}_2 + \ldots + \xi_n(t)A\boldsymbol{f}_n = \\ &= \lambda_1\xi_1(t)\boldsymbol{f}_1 + \lambda_2\xi_2(t)\boldsymbol{f}_2 + \ldots + \lambda_n\xi_n(t)\boldsymbol{f}_n. \end{aligned}$$

Vidare är

$$\boldsymbol{x}' = \xi_1'(t)\boldsymbol{f}_1 + \xi_2(t)\boldsymbol{f}_2 + \ldots + \xi_n'(t)\boldsymbol{f}_n.$$

Därför är systemet $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ ekvivalent med likheterna

$$\xi_j'(t) = \lambda_j \xi_j(t), \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Enligt Sats 1.1 har dessa ekvationer lösningarna

$$\xi_j(t) = d_j e^{\lambda_j t}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Detta ger satsen.

Exempel 1: Vi skall lösa systemet $\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{c}$, om

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Den karakteristiska ekvationen är

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -9 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 - 36 = 0.$$

Egenvärden är alltså $\lambda_1 = -7, \lambda_2 = 5$. För at finna motsvarande egenvektorer $\boldsymbol{f}_1$ och $\boldsymbol{f}_2$ löser vi systemen $(\lambda_j I - A)\boldsymbol{f}_j = \mathbf{0}$. Om $j = 1$ är detta systems totalmatris

$$\begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Alltså kan vi välja t.ex. $\boldsymbol{f}_1 = (3, -2)$. Analogt får vi $\boldsymbol{f}_2 = (3, 2)$. Enligt sats 3.1 är lösningarna till $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ alltså

$$\boldsymbol{x} = d_1 e^{-7t} \boldsymbol{f}_1 + d_2 e^{5t} \boldsymbol{f}_2 = \begin{bmatrix} 3d_1 e^{-7t} + 3d_2 e^{5t} \\ -2d_1 e^{-7t} + 2d_2 e^{5t} \end{bmatrix}.$$

Här kan d_1 och d_2 väljas fritt. Begynnelsevillkoret $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{c}$ ger emellertid att

$$\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 3d_1 + 3d_2 \\ -2d_1 + 2d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Detta ger $d_1 = -1/12, d_2 = 5/12$. Den sökta lösningen är alltså

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} e^{-7t} + \frac{5}{4} e^{5t} \\ -\frac{1}{6} e^{-7t} + \frac{5}{6} e^{5t} \end{bmatrix}$$

d.v.s.

$$\begin{cases} x_1(t) = -\frac{1}{4} e^{-7t} + \frac{5}{4} e^{5t}, \\ x_2(t) = -\frac{1}{6} e^{-7t} + \frac{5}{6} e^{5t} \end{cases}$$

Exempel 2: Vi försöker lösa systemet $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$, där

$$A = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 13 & 4 & -2 \\ 4 & 13 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{bmatrix}.$$

Detta är en *symmetrisk* matris. Eftersom alla sådana matriser är diagonaliserbara kommer vi att lyckas när vi försöker använda Sats 3.1. Vi beräknar först egenvärdena till 9A. Egenvärdena till A får vi sedan genom att dividera med 9.

$$\begin{vmatrix} 13-\lambda & 4 & -2 \\ 4 & 13-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 10-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 0 & 2(9-\lambda) \\ 0 & 9-\lambda & 2(9-\lambda) \\ -2 & -2 & 10-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)^2(18-\lambda).$$

Matrisen A har alltså egenvärdena 1, 1, 2. Vi söker nu egenvektorerna.

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$: Egenvektorerna ligger alla i planet $2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$. Som egenvektorer kan vi t.ex. välja

$$\boldsymbol{f}_1 = (1, -1, 0), \boldsymbol{f}_2 = (0, 1, 2)$$

$\boldsymbol{\lambda_3} =$2: Eftersom matrisen är symmetrisk måste varje egenvektor till egenvärdet 2 vara orgogonal $\boldsymbol{f}_1$ och $\boldsymbol{f}_2$ d.v.s. mot planet $2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$. Därför är $\boldsymbol{f}_3$ normal till detta plan. Vi kan alltså ta $\boldsymbol{f}_3 = (2, 2, -1)$.

Vi har nu att lösningarna till systemet $\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$ är

$$\boldsymbol{x} = d_1 e^t \boldsymbol{f}_1 + d_2 e^t \boldsymbol{f}_2 + d_3 e^{2t} \boldsymbol{f}_3 = \begin{bmatrix} d_1 e^t & +2d_3 e^{2t} \\ (-d_1 + d_2)e^t & +2d_3 e^{2t} \\ 2d_2 e^t & -d_3 e^{2at} \end{bmatrix}$$

där d_1, d_2, d_3 kan väljas godtyckligt.

Exempel 3: Även komplexa egenvärden och egenvektorer kan förekomma. Här ett exempel på det. Vi sätter

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -9 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vi har då att

$$\begin{vmatrix} -1 - \lambda & 9 \\ 4 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2 + 36.$$

Egenvärdena är därför $\lambda_1 = -1 - 6i, \lambda_2 = -1 + 6i$. För att beräkna motsvarande komplexa egenvektorer skall vi lösa systemen $(\lambda_j I - A)\boldsymbol{f}_j = \boldsymbol{0}$. För $j = 1$ får vi ett system med totalmatrisen

$$\begin{bmatrix} 6i & -9 \\ 4 & 6i \end{bmatrix}$$

En egenvektor är $\boldsymbol{f}_1 = (3, 2i)$. Som egenvektor till egenvärdet $-1 + 6i$ kan vi välja $\boldsymbol{f}_2 = (-3, 2i)$. Systemet $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ har alltså lösningarna

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{-t}(d_1 e^{-6it} \boldsymbol{f}_1 + d_2 e^{6it} \boldsymbol{f}_2) = e^{-t} \begin{bmatrix} 3d_1 e^{-6it} - 3d_2 e^{6it} \\ 2id_1 e^{-6it} + 2id_2 e^{6it} \end{bmatrix}.$$

Om vi enbart är intresserade av reella lösning måste vi skriva om denna lösning. Observerar vi att

$$\begin{aligned} e^{6it} &= \cos(6t) + i\sin(6t) \\ e^{-6it} &= \cos(6t) - i\sin(6t) \end{aligned}$$

får vi

$$\begin{aligned} ed_1e^{-6it} - ed_2e^{\mathrm{bi}} &= e((d_1 - d_2)\cos(6t) - i(d_1 + d_2)\sin(6t)) \\ 2id_1e^{-6it} + 2id_2e^{6it} &= 2(i(d_1 + d_2)\cos(6t) + (d_1 - d_2)\sin(6t)) \end{aligned}$$

Här kan vi välja d_1, d_2 godtyckligt, även med komplexa värden. Sätt då

$$A = d_1 - d_2, \quad B = i(d_1 + d_2)$$

dvs

$$d_1 = \frac{1}{2}(A - iB), \quad d_2 = -\frac{1}{2}(A + iB).$$

Det betyder att

$$\begin{aligned} 3d_1e^{-6it} - 3d_2e^{6it} &= 3(A\cos(6t) - B\sin(6t)) \\ 2id_1e^{-6it} + 2id_2e^{-6it} &= 2(B\cos(6t) + A\sin(6t)) \end{aligned}$$

varav

$$\mathbf{x}(t) = e^{-t}\begin{bmatrix} 3(A\cos(6t) - B\sin(6t)) \\ 2(B\cos(6t) + A\sin(6t)) \end{bmatrix}$$

Även här kan vi välja A och B fritt. Tar vi då A och B reella blir lösningen $\mathbf{x}(t)$ också reell.

Övningar (avsnitt 3.2)

1. Lös följande två system

   a) $\begin{cases} x' = 6x + 2y, & x(0) = 1, \\ y' = -2x + y, & y(0) = 1, \end{cases}$

   b) $\begin{cases} x' = x - 2y, & x(0) = 1, \\ y' = x - y, & y(0) = 0. \end{cases}$

2. Matrisen till följande system har egenvärden $2, 0.5, -1$. Finn alla lösningar!

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_3 \\ x_2' = - x_3 \\ x_3' = x_1 - x_2 + 0.5x_3 \end{cases}$$

3. Sätt

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   Visa att A har egenvärdena -2 och $-2 \pm \sqrt{2}$. Använd detta för att lösa begynnelsevärdesproblemet

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{c}.$$

4* Betrakta systemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$. Antag att A är diagonaliserbar med egenvärdena $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ och motsvarande egenvektorer $\mathbf{f}_1, \ldots \mathbf{f}_n$. Visa att alla lösningar kan skrivas

$$\mathbf{x}(t) = d_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{f}_1 + \ldots + d_n e^{\lambda_n t}\mathbf{f}_n + \mathbf{x}_p(t)$$

där

$$\mathbf{x}_p(t) = \xi_1(t)\mathbf{f}_1 + \ldots + \xi_n(t)\mathbf{f}_n.$$

Bestäm sedan $\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)$ uttryckta med hjälp av $\mathbf{b}$ och egenvärdena $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

5* Antag att A är en diagonaliserbar $n \times n$-matris och att $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ är en bas av egenvektorer med negativa egenvärden $-\omega_1^2, \ldots, -\omega_n^2$. Betrakta systemet $\boldsymbol{x}'' = A\boldsymbol{x}$. Visa att varje lösning kan skrivas

$$\boldsymbol{x}(t) = \sum_{j=1}^{n} (c_j \cos(\omega_j t) + d_j \sin(\omega_j t))\boldsymbol{f}_j,$$

där c_j, d_j är godtyckliga konstanter.

1.3 Diskussion i det allmänna fallet

I resten av detta kapitel skall vi diskutera systemet $\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$ utan att göra några speciella antaganden om matrisen A. I denna sektion tänker vi beskriva i stora drag har teorin är uppbyggd. En huvudroll spelar här Cayley-Hamiltons sats.

Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{c}. \tag{1.5}$$

Antag att $\boldsymbol{x}$ är en lösning till (3.5). Då är funktionerna $x_1, \ldots, x_n$ deriverbara på $[0, \infty)$. Därför ger (3.4) dels att $\boldsymbol{x}'(0) = A\boldsymbol{x}(0) = A\boldsymbol{c}$, dels att

$$\boldsymbol{x}'' = A\boldsymbol{x}' = AA\boldsymbol{x} = A^2\boldsymbol{x}.$$

Det följer att $\boldsymbol{x}(0) = A^2\boldsymbol{c}$. Upprepad derivation ger sedan att

$$\boldsymbol{x}^{(k)}(0) = A^k\boldsymbol{c}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Man kan här komma att tänka på Taylors formel. Om y är en skalär funktion (som uppfyller vissa förutsättningar) så gäller

$$y(t) = y(0) + ty'(0) + \frac{t^2}{2!}y''(0) + \frac{t^3}{3!}y^{(3)}(0) + \ldots$$

Nu tillåter vi oss at utan vidare kommentar tillämpa denna formel på den vektorvärden funktionen $\boldsymbol{x}$. Vi får då

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t) &= \boldsymbol{x}(0) + t\boldsymbol{x}'(0) + \frac{t^2}{2!}\boldsymbol{x}''(0) + \frac{t^3}{3!}\boldsymbol{x}^{(3)}(0) + \ldots = \\ &= \boldsymbol{c} + tA\boldsymbol{c} + \frac{t^2}{2!}A^2\boldsymbol{c} + \frac{t^2A^3}{3!}\boldsymbol{c} + \ldots .\end{aligned}$$

Sätter vi $A^0 = I =$ enhetsmatrisen av typ $n \times n$, kan vi skriva

$$\boldsymbol{x}(t) = (I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \ldots)\boldsymbol{c}.$$

Med tanke på exponentialfunktionens Taylorserie

$$e^{ta} = 1 + ta + \frac{t^2}{2!}a^2 + \frac{t^3}{3!}a^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}a^k,$$

är det naturligt att nu sätta

$$e^{tA} = 1 + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}A^k. \tag{1.6}$$

Lösningen till (3.5) skulle då helt enkelt skrivas $\boldsymbol{x}(t) = e^{tA}\boldsymbol{c}$. Man kan bevisa följande allmänna sats.

Sats 2 *Låt A vara en $n \times n$-matris. Då har systemet*

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t), \quad t > 0 \\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{c} \end{cases}$$

en entydigt bestämd lösning för varje $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$. Denna lösning kan skrivas

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{tA}\boldsymbol{c} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}A^k\boldsymbol{c}.$$

Vi avstår från att genomföra beviset. Låt oss i stället diskutera hur satsen kan användas för att i praktiken beräkna $\boldsymbol{x}(t)$. I princip måste man tydligen beräkna A^k för varje naturligt tal k, för att därefter beräkna e^{tA}. Detta verkar vara en övermänsklig uppgift.

Om A är diagonaliserbar kan vi emellertid enkelt beräkna $\boldsymbol{x}(t)$ (och därmed indirekt även e^{tA}) med hjälp av sats 3.1. Detta förhållande antyder att uppgiften att beräkna e^{tA} trots allt inte behöver vara omöjlig.

Om A är en godtycklig $n \times n$-matris definierar vi det karakteristiska polynomet $P_A(z)$ för A genom

$$P_A(z) = \det(zI - A).$$

Som bekant är nollställena till P_A lika med egenvärdena till matrisen A. Man kan visa följande viktiga sats.

Sats 3 *(Cayley-Hamiltons sats)*

Låt A vara en godtyacklig $n \times n$-matris och låt

$$P_A(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

vara dess karakteristiska polynom. Då är

$$P_A(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I = 0.$$

Poängen med Cayley-Hamiltons sats är att man kan uttrycka alla potenser A^k med hjälp av enbart $I, A, \ldots, A^{n-1}$. Satsen ger ju att

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - \ldots - a_1 A - a_0 I.$$

Det betyder att $A^n = q_n(A)$ där q_n är ett polynom av grad $< n$. Genom att multiplicera båda leden med $A, A^2, A^3, \ldots$ osv. kan man visa at $A^{n+1}, A^{n+2}, \ldots$ på liknande sätt kan skrivas som polynom i A av grad $< n$. Det följer att även e^{tA} är ett polynom i A av grad $< n$.

Vi nöjer oss här med att behandla 2×2-matriser.

Proposition: Låt A vara en godtycklig 2×2-matris med egenvärdena λ_1 och λ_2. Då gäller

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \neq \lambda_2 \quad &\Rightarrow \quad e^{tA} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(e^{t\lambda_1}(A - \lambda_2 I) - e^{t\lambda_2}(A - \lambda_1 I)), \\
\lambda_1 = \lambda_2 \quad &\Rightarrow \quad e^{tA} = e^{t\lambda_1}(I + t(A - \lambda_1 I)).
\end{aligned}$$

Bevis av den andra formeln

Sätt $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu$ och

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{t\mu}(I + t(A - \mu I))\boldsymbol{c}.$$

Uppenbarligen gäller $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}$. Det räcker därför att visa att $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$, ty då ger sats 3.2 att $\boldsymbol{x}(t) = e^{tA}\boldsymbol{c}$ vilket ger resultatet.

Först deriverar vi och får

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}' &= \mu e^{t\mu}(1 + t(A - \mu I))\boldsymbol{c} + e^{t\mu}(A - \mu I)\boldsymbol{c} = \\
&= e^{t\mu}(A + \mu t(A - \mu I))\boldsymbol{c}
\end{aligned}$$

Vi jämför nu detta med

$$A\boldsymbol{x} = e^{t\mu}(A + t(A^2 - \mu A))\boldsymbol{c}$$

Det karakteristiska polynomet för A är $P_A(z) = (z - \mu)^2 = z^2 - 2\mu z + \mu^2$. Cayley-Hamiltons sats ger att $A^2 - 2\mu A + \mu^2 I = 0$ dvs $A^2 - \mu A = \mu(A - \mu I)$. Därför är

$$A\boldsymbol{x} = e^{t\mu}(A + \mu t(A - \mu I))\boldsymbol{c}$$

dvs $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$. Detta visar den andra formeln.

Exempel 1: Beräkna e^{tA} och lös begynnelsevärdesproblemet $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ om

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Lösning: Det karakteristiska polynomet är

$$\begin{vmatrix} z-1 & -2 \\ -5 & z-4 \end{vmatrix} = z^2 - 5z - 6 = (z+1)(z-6).$$

Vi har alltså två olika egenvärden $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = 6$. Således är

$$\begin{aligned}
e^{tA} &= -\frac{1}{7}e^{-t}(A - 6I) + \frac{1}{7}e^{6t}(A + I) = \\
&= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 5e^{-t} + 2e^{6t} & -2e^{-t} + 2e^{6t} \\ -5e^{-t} + 5e^{6t} & 2e^{-t} + te^{6t} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Därför är den sökta lösningen

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} &= e^{tA}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 5e^{-t}+2e^{6t} & -2e^{-t}+2e^{6t} \\ -5e^{-t}+5e^{6t} & 2e^{-t}+5e^{6t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\
&= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3e^{-t}+4e^{6t} \\ -3e^{-t}+10e^{6t} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2, & x_1(0) = 1, \\ x_2' = 5x_1 + 4x_2, & x_2(0) = 1. \end{cases}$$

är alltså

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{3}{7}e^{-t} + \frac{4}{7}e^{6t} \\ x_2(t) = -\frac{3}{7}e^{-t} + \frac{10}{7}e^{6t} \end{cases}$$

Exempel 2: Beräkna e^{tA} om

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lösning: Det karakteristiska polynomet är

$$\begin{vmatrix} z & -1 \\ 1 & z-2 \end{vmatrix} = z^2 - 2z + 1 = (z-1)^2.$$

Här finns bara ett egenvärde $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Därför blir

$$e^{tA} = e^t(I + t(A-I)) = \begin{bmatrix} (1-t)e^t & te^t \\ -te^t & (1+t)e^t \end{bmatrix}.$$

Exempel 3: Metoden att beräkna e^{tA} fungerar även om egenvärdena är icke-reella. Här ett exempel på det. Sätt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

då är

$$\begin{vmatrix} z-1 & 1 \\ 2 & z-1 \end{vmatrix} = (z-1)^2 + 2.$$

Egenvärdena är alltså $\lambda_1 = 1 - i\sqrt{2}, \quad \lambda_2 = 1 + i\sqrt{2}$. Därför är

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \frac{1}{2i\sqrt{2}} e^t[-e^{-i\sqrt{2}t}(A-(1+i\sqrt{2})I) + e^{i\sqrt{2}t}(A-(1-i\sqrt{2})I] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^t[\sin(\sqrt{2}t)\cdot(A-I) + \sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t)\cdot I] \end{aligned}$$

Övningar (avsnitt 3.3)

1. Bestäm e^{tA} för följande två matriser

   a) $A = \begin{bmatrix} -5 & -16 \\ 6 & 15 \end{bmatrix}$

   b) $A = \begin{bmatrix} -8 & -16 \\ 9 & 16 \end{bmatrix}$

   Lös i vart och ett av fallen begynnelsevärdesproblemet
   $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}, x_1(0) = 1, x_2(0) = -1$.

2. Sätt

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

   visa att

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}.$$

   Sätt sedan

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

   och beräkna e^{tB} på en eller två rader.

3. Sätt

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Visa at $A^3 = 0$ och beräkna sedan e^{tA}.

4. Sätt

$$A = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}.$$

   Beräkna e^{tA}.

1.4 Asymptotiskt uppträdande

Låt $(x(t), y(t))$ vara en lösning till systemet

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy \end{cases} \tag{1.7}$$

När t varierar kommer $(x(t), y(t))$ att genomlöpa en viss kurva i xy-planet. En sådan kurva kallas en *bana* till systemet (3.7). Eftersom lösningarna existerar för alla t så låter vi t variera över hela reella axeln, men vi är primärt intresserade av vad som händer då $t \to +\infty$.

Till varje lösning till (3.6) hör alltså en bana. Olika lösningar kan emellertid ge uphov till samma bana. Låt nämligen $(x(t), y(t))$ beskriva en viss bana Γ och sätt $x_0 = x(0), y_0 = y(0)$. Vi definierar nu $\tilde{x}$ och $\tilde{y}$ genom att sätta

$$\tilde{x}(t) = x(t - t_0), \tilde{y}(t) = y(t - t_0).$$

Då är $(\tilde{x}, \tilde{y})$ en lösning till (3.6) sådan att $(\tilde{x}, \tilde{y}(t))$ också beskriver banan Γ. Skillnaden ligger i vid vilken tidpunkt som punkten (x_0, y_0) passeras. I den första beskrivningen av Γ passeras (x_0, y_0) vid tiden $t = 0$. I den andra passeras (x_0, y_0) vid tiden $t = t_0$, eftersom $\tilde{x}(t_0) = x(0) = x_0, \tilde{y}(t_0) = y(0) = y_0$.

För varje val av punkt (x_0, y_0) finns det precis en bana Γ som passerar genom (x_0, y_0). Det finns nämligen precis en lösning $(x(t), y(t))$ till (3.7) sådan att $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$.

Vi skall nu studera hur banorna till systemet (3.7) uppträder då $t \to \infty$ för olika värden på koefficienterna. Vi avstår från att presentera en heltäckande teori och nöjer oss med att ge några representativa exempel. I dessa exempel spelar naturligtvis egenvärdena till systemet en entral roll. Egenvärdena ges av ekvationen

$$\lambda^2 - 2\alpha\lambda + \beta = 0$$

där

$$\alpha = \frac{a + d}{2}, \quad \beta = ad - bc. \tag{1.8}$$

Egenvärden till (3.7) är därför

$$\lambda_1 = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta}, \quad \lambda_2 = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta}.$$

Exempel 1: (Egenvärdena icke-reella)

Vi betraktar systemet

$$\begin{cases} x' = ax + y \\ y' = -x + ay. \end{cases}$$

Då är $\alpha = a, \quad \beta = a^2 + 1$. Egenvärden blir alltså $\lambda_1 = a - i, \quad \lambda_2 = a + i$. Eftersom egenvärdena är olika måste systemmatrisen A vara diagonaliserbar. Eftersom

$$\begin{aligned} A - \lambda_1 I &= \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -i & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ A - \lambda_2 I &= \begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

kan vi som egenvektorer välja

$$f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

Lösningarna till systemet kan alltså skrivas

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= d_1 e^{(a+i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} + d_2 e^{(a-i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \\ &= e^{at} \begin{bmatrix} d_1 e^{it} + d_2 e^{-it} \\ i d_1 e^{it} - i d_2 e^{-it} \end{bmatrix} = \\ &= e^{at} \begin{bmatrix} (d_1 + d_2)\cos(t) + i(d_1 - d_2)\sin(t) \\ i(d_1 - d_2)\cos(t) - (d_1 - d_2)\sin(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sätter vi $A = d_1 + d_2$ och $B = i(d_1 - d_2)$ får vi

$$\begin{cases} x = e^{at}(A\cos(t) + B\sin(t)) \\ y = e^{at}(B\cos(t) - A\sin(t)) \end{cases}$$

Tar vi här A och B reella blir lösningarn reella. För att studera lösningarna närmare sätter vi

$$R = \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Eftersom

$$(\frac{A}{R})^2 + (\frac{B}{R})^2 = 1$$

finns det en vinkel φ så att

$$\cos(\varphi) = \frac{A}{R}, \quad \sin(\varphi) = \frac{B}{R}.$$

Då blir

$$A\cos(t) + B\sin(t) = R(\cos\varphi\cos A) + \sin(\varphi)\sin(t)) = R\cos(\varphi - t)$$

och

$$B\cos(t) - A\sin(t) = R(\sin(\varphi)\cos(t) - \cos(\varphi)\sin(t)) = R\sin(\varphi - t).$$

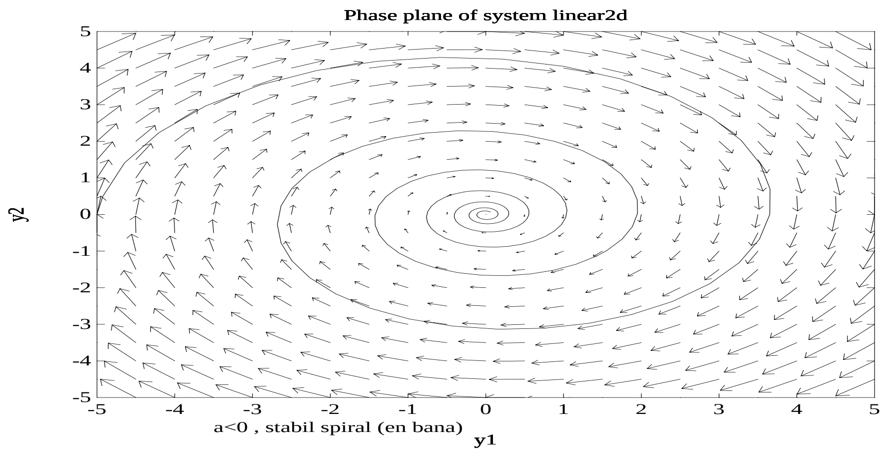
Det betyder att lösningarna är

$$\begin{cases} x(t) = Re^{at}\cos(\varphi - t) \\ y(t) = Re^{at}\sin(\varphi - t) \end{cases}$$

I fallet $a = 0$ blir

$$x(t) = R\cos(\varphi - t),\ y(t) = R\sin(\varphi - t).$$

Det innebär att banorna för systemet är cirklar som genomlöps medurs.

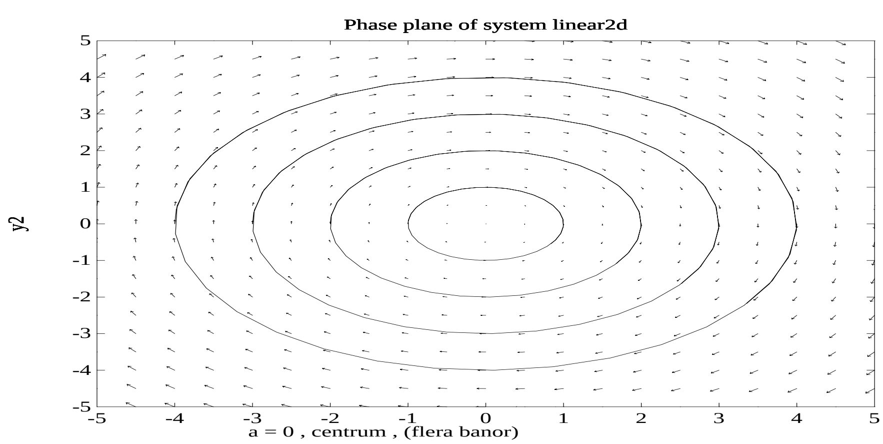


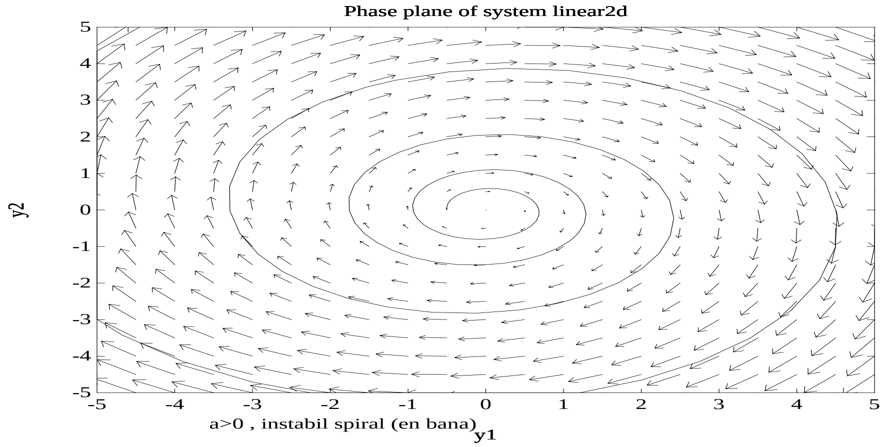
Om $a \neq 0$ blir banorna istället spiraler, innåtriktade om $a < 0$ och utåtriktade om $a > 0$. (Se figurer!)

Lösningarna kan alltså skrivas

$$x(t) = Re^{at}\cos(\varphi - t),\ y(t) = Re^{at}\sin(\varphi - t).$$

Om $a < 0$ är banorna spriraler som går in mot origo i negativ orientering. Om $a > 0$ är banorna spiraler som går ut mot oändligheten.





I följande figurer har vi dels ritat ut banor, dels också riktningsfältet för systemet. Vi har alltså valt ett rutnät av punkter och i varje punkt i detta rutnät har vi ritat en pil som anger tangentriktningen $(x', y') = (ax + y, -x + ay)$.

Exempel 2: (Reella egenvärden)

Betrakta systemet

$$\begin{cases} x' = ax + y \\ y' = x + ay. \end{cases}$$

Här är egenvärdena $\lambda_1 = a - 1$, $\lambda_2 = a + 1$. Läsaren övertygar sig lätt om att lösnigarna har formen

$$\begin{cases} x(t) = Ae^{(a-1)t} + Be^{(a+1)t} \\ y(t) = -Ae^{(a-1)t} + Be^{(a+1)t} \end{cases}$$

Om vi vill studera vad som händer då $t \to \infty$ är det naturligt att skilja på tre huvudfall, nämligen $a < -1$, $-1 < a < 1$ och $a > 1$. Dessutom har vi gränsfallen $a = -1$ och $a = 1$.

Om $a < -1$ har vi att $x(t) \to 0$ och $y(t) \to 0$ då $t \to \infty$, oberoende av valet av A och B. Om $a > 1$ kommer $|x(t)| \to \infty$ och $|y(t)| \to \infty$ då $t \to \infty$ (utom i fallet $A = B = 0$).

Om $-1 < a < 1$ blir uppträdandet beroende av A och B. I fallet $B = 0$ komer $x(t) \to 0$ och $y(t) \to 0$. Annars kommer $|x(t)| \to \infty$ och $|y(t)| \to \infty$.

Exempel 3: Betrakta exemplet i övning 1 till avsnitt 3.1, alltså systemet
$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{c}$

$$A = \begin{bmatrix} -0.03 & 0.01 & 0.01 \\ 0.01 & -0.02 & 0.03 \\ 0.02 & 0.01 & -0.04 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Genom att utnyttja att varje kolonn har summan noll kan man ganska lätt få fram matrisens egenvärder.

$$\begin{vmatrix} -0.03-\lambda & 0.01 & 0.01 \\ 0.01 & -0.02-\lambda & 0.03 \\ 0.02 & 0.01 & -0.04-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & -\lambda & -\lambda \\ 0.01 & -0.02-\lambda & 0.03 \\ 0.02 & 0.01 & -0.04-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$
= -\lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.01 & 0.02-\lambda & 0.03 \\ 0.02 & 0.01 & 0.04-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -0.03-\lambda & 0.02 \\ 0 & -0.01 & -0.06-\lambda \end{vmatrix} =
$$

$$
= -\lambda((\lambda+0.03)(\lambda+0.06)+0.0002) = -\lambda^2(\lambda+0.04)(\lambda+0.05)
$$

Egenvärdena är alltså $0, -0.04$ och -0.05. Därför kan varje lösning skrivas

$$
\mathbf{x}(t) = d_1\mathbf{f}_1 + d_2 e^{-0.04t}\mathbf{f}_2 + d_3 e^{-0.05t}\mathbf{f}_3,
$$

där $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ är egenvektorer till respektive egenvärden. Det följer att

$$
\mathbf{x}(t) \to d_1\mathbf{f}_1 \quad \text{då} \quad t \to \infty.
$$

Läsaren övertyger sig lätt om att

$$
\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

är en egenvektor till egenvärdet 0. Eftersom kolonnsumman i A är noll måste vi ha att

$$
x_1'(t) + x_2'(t) + x_3'(t) = 0 \quad \text{för alla} \quad t.
$$

Därför är $x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) = c_1 + c_2 + c_3 = 100$ för alla t.

Det följer att

$$
\lim_{t\to\infty} x_1(t) + \lim_{t\to\infty} x_2(t) + \lim_{t\to\infty} x_3(t) = 100.
$$

Eftersom $\mathbf{x}(t) \to d_1 f_1$ följer det till slut att

$$
d_1(1+2+1) = 4d_1 = 100, \quad \text{dvs} \quad d_1 = 25.
$$

Således har vi att

$$
\mathbf{x}(t) \to \begin{bmatrix} 25 \\ 50 \\ 25 \end{bmatrix}, \quad \text{då} \quad t \to \infty.
$$

Övningar (avsnitt 3.4)

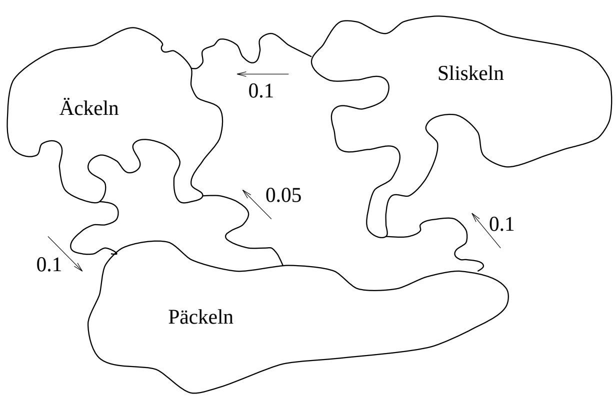
1. Betrakta systemet
$$\begin{cases} x' = -0.01x + 0.02y, & x(0) = a \\ y' = 0.1x - 0.2y, & y(0) = b \end{cases}$$
Bestäm
$$\lim_{t\to\infty} x(t) \quad \text{och} \quad \lim_{t\to\infty} y(t)$$

2. Betrakta systemet
$$\begin{cases} x' = 2x + by, & x(0) = x_0 \\ y' = bx + 2y, & y(0) = y_0 \end{cases}$$
där $b > 0$. Bestäm gränsvärdena
$$\lim_{t\to\infty} e^{-(2+b)t}x(t),\ \lim_{t\to\infty} e^{-(2+b)t}y(t)$$

3. Betrakta systemet
$$\begin{cases} x' = -0.1x + y \\ y' = -2x - 0.1y \end{cases}$$
Rita den bana som passerar genom $(3, 3)$.

4. Matriser
$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$
har egenvärdena $0, -3, -3$. Finn $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t)$ om
$$\mathbf{x}' - A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

5. I ett sjösystem med tre sjöar, Äckeln, Päckeln och Sliskeln sker ett kontinuerligt utbyte av giftämnet viskofrenol. Ämnet överförs enligt följande figur, där siffrorna anger andelar av ämnet som överförs per tidsenhet.



Vid en viss tidpunkt har man upp följande mängder viskofrenol:

Äckeln 100, Päckeln 250, Sliskeln 80.

Hur blir den långsiktiga fördelningen av viskofrenol mellan de tre sjöarna (dvs vad händer då $t \to \infty$).

6. Betrakt systemet
$$\begin{cases} x' = -0.5x - 0.5y + z, & x(0) = 1 \\ y' = -0.5x - 0.5y + z, & y(0) = 2 \\ z' = x + y - 2z, & z(0) = 3 \end{cases}$$
Systemets matris har egenvärden $0, 0, -3$. Bestäm
$$\lim_{t\to\infty} x(t),\ \lim_{t\to\infty} y(t) \quad \text{och} \lim_{t\to\infty} z(t).$$

7. Låt A vara en diagonaliserbar matris vars alla egenvärden är < 0. Visa att det för varje lösning till $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ gäller $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = 0$.

Svar

1. $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{c}$ där
$$A = \begin{bmatrix} -0.03 & 0.01 & 0.01 \\ 0.01 & -0.02 & 0.03 \\ 0.02 & 0.01 & -0.04 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. $\begin{cases} x_1(t) = (c_1 t + c_2)e^t \\ x_2(t) = (c_1 t + c_1 + c_2)e^t \end{cases}$

3. Om f är en egenvektor till egenvärdet 0 så är $x(t) = f$ en konstant lösning.

4. $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_2 - x_3 \\ x_3' = -4x_1 - 3x_2 - 2x_3 \end{cases}$

Svar (avsnitt 3.2)

1. (a) $x(t) = 2e^{5t} - e^{2t}$, $y(t) = -e^{5t} + 2e^{2t}$
(b) $x(t) = \cos(t) + \sin(t)$, $y(t) = \sin(t)$.

2. $\begin{cases} x_1 = -d_1 e^{-t} + 2d_2 e^{t/2} + 2d_3 e^{2t} \\ x_2 = 2d_1 e^{-t} + 2d_2 e^{t/2} - d_3 e^{2t} \\ x_3 = 2d_1 e^{-t} - d_2 e^{t/2} + 2d_3 e^{2t} \end{cases}$

3. $\mathbf{x}(t) = \dfrac{1}{2} e^{-2t} \begin{bmatrix} e^{t\sqrt{2}} + e^{-t\sqrt{2}} \\ \sqrt{2}e^{t\sqrt{2}} - \sqrt{2}e^{-t\sqrt{2}} \\ e^{t\sqrt{2}} + e^{-t\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

4. Om $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{f}_1 + \ldots + \beta_n\mathbf{f}_n$ är

$$\xi_j(t) = \begin{cases} \beta_j t & \text{om} \quad \lambda_j = 0 \\ \beta_j \frac{e^{\lambda_j t}-1}{\lambda_j} & \text{om} \quad \lambda_j \neq 0 \end{cases}$$

Svar (avsnitt 3.3)

1. (a) $\begin{cases} x_1(t) = -e^{3t} + 2e^{7t} \\ x_2(t) = 0.5e^{3t} - 1.5e^{7t} \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x_1(t) = e^{4t}(1+4t) \\ x_2(t) = e^{4t}(-1-3t) \end{cases}$

2. $e^{tB} = e^{2t}\begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$

3. $e^{tA} = \begin{bmatrix} 1 & t & 4t + t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

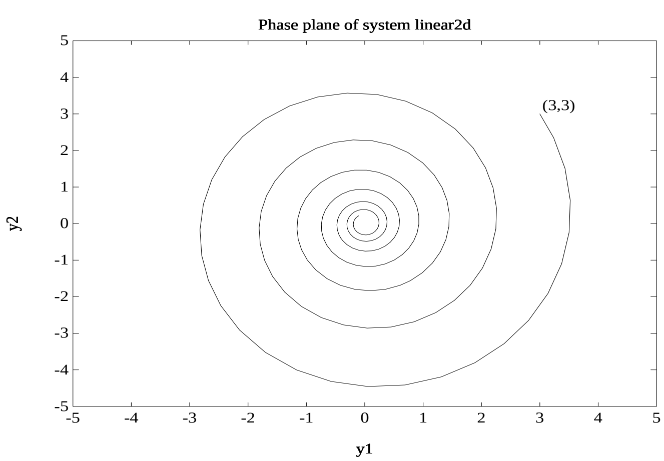
4. $e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{tp} & 0 & 0 \\ 0 & e^{tq} & 0 \\ 0 & 0 & e^{tr} \end{bmatrix}$

Svar (avsnitt 3.4)

1. $\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{2}{3}(a+b)$, $\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{1}{3}(a+b)$

2. $\lim_{t\to\infty} e^{-(2+b)t}x(t) = \lim_{t\to\infty} e^{-(2+b)t}y(t) = \frac{1}{2}(x_0+y_0)$

3.



4. $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

5. $\begin{cases} \text{Äckeln} & (3/7)\cdot 430 \\ \text{Päckeln} & (2/7)\cdot 430 \\ \text{Sliskeln} & (2/7)\cdot 430 \end{cases}$

6. $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2.5 \\ 2.0 \end{bmatrix}$

7. Använd sats 3.1.