Sommarmatte – del 2

Matematiska Vetenskaper

16 mars 2017

Innehåll

5 Ekvationer och olikheter

5.1 Komplexa tal

5.1.1 Algebraisk definition, imaginära rötter

Vilka tal x uppfyller ekvationen $x^2 = 2$? Det är $\sqrt{2}$ och $-\sqrt{2}$, eller hur? Man kan ganska lätt visa att $\sqrt{2}$ inte är ett rationellt tal, dvs. det kan inte skrivas som en kvot mellan heltal. Detta var något som oroade de gamla grekerna. De kände till $\sqrt{2}$ som längden av hypotenusan i en rätvinklig triangel med kateterna av längd 1. De enda tal de ville godkänna var dock de rationella. När de upptäckte att $\sqrt{2}$ inte var rationellt blev de förstås oroliga. Förmodligen är det inget som har oroat dig, och det finns ingen anledning att börja oroa sig nu. Matematiker har ju "hittat på" de reella talen som innefattar bl.a. $\sqrt{2}$ så problemet är löst.

Hur är det då med ekvationen $x^2 = -1$? Denna vet vi att den inte har några reella rötter, eftersom kvadraten av ett reellt tal aldrig kan bli negativt. Finns det anledning till oro? Tja, det har visat sig att man i många lägen faktiskt har nytta också av lösningar som inte är reella och det fina är att det finns en konstruktion av ytterligare tal som bl.a. ger lösningar till denna ekvation. Precis som man kunde utvidga de rationella talen till alla de reella talen, så kan också de reella talen utvidgas till vad som kallas för de komplexa talen.

Konstruktionen av de komplexa talen går till så här. Först inför vi ett nytt tal som kallas för den **imaginära enheten** och betecknas med bokstaven i. Vi bestämmer att $i \cdot i = i^2 = -1$. Därmed vet vi garanterat att det inte kan vara ett reellt tal, eftersom $a^2 \geq 0$ för alla reella tal. De **komplexa talen** definieras som mängden av alla algebraiska uttryck $a + i \cdot b$ där a och b är reella tal och i är den imaginära enheten. Två komplexa tal är lika, $a + i \cdot b = c + i \cdot d$, om och endast om $a = c$ och $b = d$.

Addition och multiplikation av komplexa tal definieras nu som addition och multiplikation av algebraiska uttryck med den extra regeln att $i^2 = -1$. Vi får därmed att

$$(a + i \cdot b) + (c + i \cdot d) = (a + c) + i \cdot (b + d)$$

och

$$(a + i \cdot b) \cdot (c + i \cdot d) = ac + i \cdot (ad + bc) + i^2 bd = (ac - bd) + i \cdot (ad + bc).$$

Observera här att multiplikation av två komplexa tal ger återigen ett komplext tal på formen $x + iy$ där x och y är reella tal.

Per definition har vi att $i^2 = -1$ och vi får också att $(-i)^2 = (i^2)(-1)^2 = -1$. Därmed har vi alltså två rötter till ekvationen $x^2 = -1$.

Exempel. Låt $z = 2 + 3i$ och $w = 1 - 2i$ vara två komplexa tal. Vi använder definitionerna för att addera

$$z + w = (2 + 3i) + (1 - 2i) = (2 + 1) + i \cdot (3 - 2) = 3 + i$$

och multiplicera

$$z \cdot w = (2 + 3i) \cdot (1 - 2i) = (2 \cdot 1 - 3 \cdot (-2)) + i \cdot (2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1) = 8 - i$$

de två komplexa talen z och w. □

Det går nu att visa att denna addition och multiplikation funkar precis på samma sätt som vår vanliga addition och multiplikation för reella tal och att de följer samma regler. Sammanfattningsvis så kan man alltså addera och multiplicera komplexa tal precis som reella tal förutom att man måste komma ihåg att $i \cdot i = -1$. Det kan vara värt att påpeka att det inte går att utvidga de komplexa talen ytterligare och fortfarande behålla samma räkneregler, så man skulle kunna säga att de komplexa talen är den slutgiltiga och fullständiga talmängden.

Hur är det då med division? Innan vi svarar på frågan så inför vi en praktisk beteckning. Om $z = a + ib$ så definieras dess **konjugat** som $\bar{z} = a - ib$. Produkten av ett komplext tal och dess konjugat är

$$z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 - i^2b^2 = a^2 - (-1)b^2 = a^2 + b^2.$$

Observera att $a^2 + b^2$ är ett icke-negativt reellt tal. Antag nu att $z = a + ib \neq 0$, dvs. att antingen $a \neq 0$ eller $b \neq 0$. Då är $a^2 + b^2 \neq 0$. Sätt

$$w = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{1}{(z\bar{z})}\bar{z}.$$

Då gäller att

$$zw = \frac{(a+ib)(a-ib)}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1.$$

Vi ser att w är inversen till det komplexa talet z så

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z\bar{z})}\bar{z}$$

eftersom vi då får $\frac{1}{z} \cdot z = 1$. Därmed kan vi definiera division för komplexa tal genom att sätta

$$\frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w} = z \cdot \frac{1}{(w\bar{w})}\bar{w} \text{ om } w \neq 0.$$

Exempel. Förenkla uttrycket $\dfrac{1+i}{2+3i}$ till ett komplext tal på formen $a + ib$.

Genom att förlänga med konjugatet av nämnaren och utnyttja konjugatregeln så får vi

$$\begin{aligned}\frac{1+i}{2+3i} &= (1+i)\cdot\frac{1}{(2+3i)(2-3i)}\cdot(2-3i) = \frac{1}{(2+3i)(2-3i)}\cdot(1+i)(2-3i) \\ &= \frac{(2-(-3)) + i(2-3)}{2^2+3^2} = \frac{5-i}{13} = \frac{5}{13} - i\frac{1}{13}.\end{aligned}$$

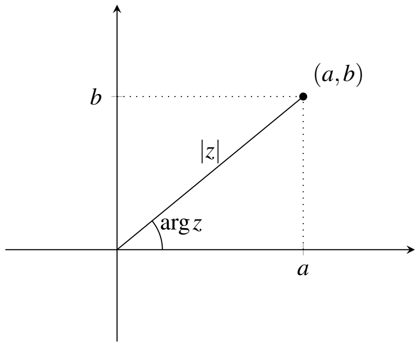
Vi kan kontrollera vår räkning genom att multiplicera svaret med $2 + 3i$ och jämföra med $1 + i$. □

För ett komplext tal $z = a + ib$ så kallar man a för **realdelen** och b för **imaginärdelen**. Dessa betecknas med $\Re z$ respektive $\Im z$, så $\Re z = a$ och $\Im z = b$.

Observera att de reella talen är en delmängd till de komplexa talen. Ett reellt tal är helt enkelt ett komplext tal vars imaginärdel är noll. Viktigt i sammanhanget är att vår definition av addition och multiplikation för komplexa tal ger den "vanliga" additionen för reella tal. Kontrollera i definitionerna genom att sätta $b = d = 0$. Då blir summan $a + c$ och produkten ac. Ett komplext tal som inte är reellt, dvs. imaginärdelen ej noll, kallar man för ett **imaginärt tal**.

5.1.2 GEOMETRISK REPRESENTATION, POLÄRA KOORDINATER

Det har visat sig vara mycket användbart att representera komplexa tal som punkter i ett koordinatsystem. Man låter helt enkelt talet $a+ib$ svara mot (a,b). I figur 1 är ett komplext tal $a+ib$ inprickat på sin plats (a,b).



Figur 1: Komplext tal i ett koordinatsystem.

Den vågräta axeln (x-axeln) kallas för den **reella axeln** och den lodräta axeln (y-axeln) kallas för den **imaginära axeln**.

Denna geometriska representation av komplexa tal leder naturligt till två viktiga begrepp för ett komplext tal z, nämligen **beloppet** av z samt **argumentet** för z. Beloppet för z betecknas med $|z|$ och det definieras som avståndet ifrån origo till (a,b). Formeln för avstånd ger att

$$|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Argumentet för z betecknas med $\arg z$ och det definieras som vinkeln mellan den positiva x-axeln och linjen ifrån origo till (a,b). Både belopp och argument är markerade i figur 1. Normalt väljer man argumentet i intervallet $(-\pi,\pi]$. Om man gör det så svarar varje tal $a+i\cdot b$ mot ett unikt par $(|z|,\arg z)$. Man kan alltså representera ett komplext tal också med dess belopp och argument.

Vi såg i förra avsnittet att om $z=a+ib$ så var $z\bar{z}=a^2+b^2$. Alltså är

$$z\bar{z} = a^2+b^2 = |z|^2$$

vilket är en likhet väl värd att lägga på minnet.

Det finns ingen riktigt lika snygg och fin formel för argumentet. I figur 1 framgår det att när $a,b>0$, dvs. då (a,b) ligger i första kvadranten, så är

$$\tan(\arg z) = \frac{b}{a} \quad \text{och} \quad \arg z = \arctan\left(\frac{b}{a}\right).$$

Detta funkar alltid då $a>0$. (Kom ihåg att arctan alltid ger en vinkel i intervallet $(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.) För $a<0$ så får man lägga till π för att få rätt vinkel och när $a=0$ så är argumentet $-\pi/2$ eller $\pi/2$ beroende på tecknet på b. Sammanfattningsvis så har man:

$$\arg(a+ib) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{om } a>0, \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right)+\pi & \text{om } a<0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{om } a=0 \text{ och } b>0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{om } a=0 \text{ och } b<0. \end{cases}$$

Emellertid kan man lätt känna igen de enkla vinklarna 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/2$ etc (se tabellen i slutet av avsnitt 3.2.2 i del 1).

Vi ska nu införa ett annat sätt att representera komplexa tal, nämligen med så kallade **polära koordinater**. Låt $z = a + ib$ och sätt $r = |z|$ och $v = \arg z$. Från figur 1 och definitionen av de trigonometriska funktionerna så får vi att $a = r\cos v$ och $b = r\sin v$. Vi får alltså att

$$z = a + ib = r\cos v + ir\sin v = r(\cos v + i\sin v).$$

Detta sätt att skriva det komplexa talet med hjälp av belopp och argument är just vad som kallas för polära koordinater. Det ursprungliga sättet, $a + i \cdot b$, kallas för **kartesiska koordinater**.

En av styrkorna med de polära koordinaterna är att det är enkelt att multiplicera och dividera komplexa tal på polär form. Låt $z = r(\cos v + i\sin v)$ och $w = s(\cos w + i\sin w)$. Med hjälp av additionsformler för sinus och cosinus (se avsnitt 5.2.2) så får vi

$$\begin{aligned} zw &= r(\cos v + i\sin v) \cdot s(\cos w + i\sin w) \\ &= rs((\cos v\cos w - \sin v\sin w) + i(\cos v\sin w + \sin v\cos w)) \\ &= rs(\cos(v + w) + i\sin(v + w)). \end{aligned}$$

När man multiplicerar två komplexa tal så multipliceras alltså beloppen och argumenten adderas. Speciellt får vi för inversen $\frac{1}{z} = s(\cos w + i\sin w)$ till $z = r(\cos v + i\sin v)$ att

$$1 = \frac{1}{z} \cdot z = rs(\cos(v + w) + i\sin(v + w)).$$

Eftersom $|1| = 1$ och $\arg 1 = 0$ drar vi slutsatsen att

$$\left|\frac{1}{z}\right| = s = \frac{1}{r} = \frac{1}{|z|} \quad \text{och} \quad \arg\frac{1}{z} = w = -v = -\arg z.$$

För division får vi därmed

$$\left|\frac{w}{z}\right| = \frac{|w|}{|z|} \quad \text{och} \quad \arg\frac{w}{z} = \arg w - \arg z.$$

Exempel. Låt z och w vara komplexa tal med $|z| = 2$, $|w| = 3$, $\arg z = 3\pi/8$ och $\arg w = \pi/8$. Beräkna talen zw och z/w så explicit som möjligt.

Vi vet att $|zw| = |z|\,|w| = 2 \cdot 3 = 6$ och att

$$\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w) = 3\pi/8 + \pi/8 = \pi/2.$$

Alltså är $zw = 6i$ eftersom argumentet anger att riktningen är längs positiva y-axeln och avståndet till origo är 6.

Vi får också att

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} = \frac{2}{3}$$

samt

$$\arg(z/w) = \arg(z) - \arg(w) = 3\pi/8 - \pi/8 = \pi/4.$$

Argumentet $\pi/4$ betyder linjen $y = x$ så att talet är en positiv multipel av $1+i$. Beloppet av $1+i$ är $\sqrt{2}$ så

$$\frac{z}{w} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) = \frac{2}{3\sqrt{2}}(1+i) = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}i$$

i kartesiska koordinater. $\square$

Riktigt kraftfulla blir de polära koordinaterna när man ska ta (heltals)potenser av komplexa tal. Heltalspotens är ju bara upprepad multiplikation, och om vi upprepar argumentet ovan för produkt så får vi följande eleganta formel för potens av komplexa tal uttryckt i polära koordinater.

De Moivres formel. Låt $z = r(\cos v + i \sin v)$ vara ett komplext tal i polära koordinater. Då gäller att

$$z^n = r^n(\cos(nv) + i\sin(nv)).$$

Exempel. Beräkna $(1+i)^{100}$.

Man skulle förstås successivt kunna räkna ut $(1+i)^2$, $(1+i)^4$, $(1+i)^8$ etc, men mycket enklare och mer effektivt blir det att använda de Moivres formel. Vi börjar med att skriva $z = 1+i$ med polära koordinater. Vi har att $|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ och $\arg z = \pi/4$. De Moivres formel ger då att

$$\begin{aligned} z^{100} &= \left(\sqrt{2}\right)^{100}\left(\cos\left(\frac{100\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{100\pi}{4}\right)\right) \\ &= \left(2^{1/2}\right)^{100}(\cos(25\pi) + i\sin(25\pi)) = 2^{50}(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = -2^{50}. \end{aligned}$$

eftersom $\cos(\pi) = -1$ och $\sin(\pi) = 0$. $\square$

Övningar

5.1.1 Förenkla följande uttryck till formen $a+ib$.

a. $(3+i)-(1-4i)$ b. $(3+i)(1-4i)$ c. $(3-4i)^2$
d. $1/(1+i)$ e. $1/(1-4i)$ f. $(3+i)/(1-4i)$
g. $1/(3+i) + 1/(1-4i)$

5.1.2 Skriv följande tal på polär form.

a. $3i$ b. $1-i$ c. $5+5i$
d. $1+\sqrt{3}i$ e. $-1-\sqrt{3}i$

5.1.3 Skriv talen med följande belopp och argument på formen $a+ib$.

a. $|z| = 1$, $\arg z = -\pi/2$
b. $|z| = 4$, $\arg z = \pi$
c. $|z| = 2$, $\arg z = \pi/3$

5.1.4 Beräkna följande potenser med hjälp av de Moivres formel.

a. z^8 med $z = 1+i$
b. z^{10} med $z = 1+\sqrt{3}i$
c. z^5 med $z = 1-i$

5.2 Ekvationer med elementära funktioner

5.2.1 Polynom med imaginära rötter

Vi har redan i del 1 i avsnittet om andragradsekvationer bestämt reella rötter till andragradsekvationen $x^2+px+q=0$. Vi kom fram till att lösningarna till denna ges av

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{och} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Dessa härleddes med hjälp av kvadratkomplettering

$$x^2+px+q=0 \Leftrightarrow (x+p/2)^2 = (p/2)^2 - q.$$

Om uttrycket $(p/2)^2 - q < 0$ så får vi inga reella lösningar. Det visar sig dock att det finns komplexa lösningar. Vi får med hjälp av definitionen av den imaginära enheten och räknereglerna att om $a > 0$ så är

$$\left(i\sqrt{a}\right)^2 = i^2\left(\sqrt{a}\right)^2 = (-1)a = -a \text{ och } \left(-i\sqrt{a}\right)^2 = (-i)^2\left(\sqrt{a}\right)^2 = (-1)a = -a.$$

Det gör att om $(p/2)^2 - q < 0$ så ges två lösningar till $x^2+px+q=0$ av

$$x_1 = -p/2 + i\sqrt{q-(p/2)^2} \quad \text{och} \quad x_2 = -p/2 - i\sqrt{q-(p/2)^2},$$

där uttrycket under rottecknet bytt tecken och alltså är positivt.

Exempel. Lös ekvationen $x^2 - 2x + 5$.

Vi observerar att

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = (-2/2)^2 - 5 = 1 - 5 = -4 < 0$$

så det finns inga reella lösningar. Vi använder oss av formeln och får

$$x_{1,2} = -(-2/2) \pm i\sqrt{-(-2/2)^2+5} = 1 \pm i\sqrt{4}.$$

Det ger oss lösningarna

$$x_1 = 1 + i\sqrt{4} = 1+2i \quad \text{och} \quad x_2 = 1 - i\sqrt{4} = 1-2i.$$

□

Vi ser i exemplet och i den allmänna formeln att de två rötterna är varandras konjugat. Denna observation är något som kan generaliseras till alla polynom (med reella koefficienter). Vi har nämligen:

Om z är ett nollställe till ett polynom $p(x)$ med reella koefficienter, så är också dess konjugat $\bar{z}$ nollställe till $p(x)$.

Beviset av detta bygger på enkla räkneregler för konjugat, samt det faktum att $\bar{a} = a$ om a är ett reellt tal. Vi kan då härleda att $p(\bar{z}) = \overline{p(z)}$ och det följer att $\bar{z}$ är ett nollställe till p om z är ett nollställe till p (och p har reella koefficienter).

När det gäller polynom av högre grad så gäller det precis som tidigare (se avsnittet Polynom av högre grad, faktorsatsen, polynomdivision i del 1) att man kan reducera till lägre grad om man känner till eller lyckas bestämma något av nollställena. Faktorsatsen funkar för komplexa nollställen också, dvs. om $a+ib$ är ett nollställe till polynomet $p(x)$ så får man $p(x) = (x-(a+ib)) \cdot q(x)$ där $q(x)$ är ett polynom (med komplexa koefficienter).

Om man har ett nollställe $a+ib$ så vet vi ju att också $a-ib$ är ett nollställe och det är då praktiskt att multiplicera ihop motsvarande två faktorer för då får man ett reellt andragradspolynom och slipper komplexa koefficienter:

$$\begin{aligned}(x-(a+ib))(x-(a-ib)) &= x^2-((a+ib)+(a-ib))x+(a+ib)(a-ib) \\ &= x^2-2ax+(a^2+b^2).\end{aligned}$$

Exempel. Vi vet att polynomet $x^4-2x^3+x^2+2x-2$ har ett nollställe $1+i$. Bestäm alla andra nollställen.

Eftersom $1+i$ är ett nollställe så är också $1-i$ ett nollställe. Därmed kan vi dividera bort

$$(x-(1+i))(x-(1-i)) = x^2-((1+i)+(1-i))x+(1+i)(1-i) = x^2-2x+2.$$

Vi gör det med kort division (se avsnittet om polynomdivision i del 1)

$$x^4-2x^3+x^2+2x-2 = (x^2-2x+2)(ax^2+bx+c).$$

Vi får att x^4-termen ger $a=1$ och konstanttermen ger $-2=2c$ så $c=-1$. Om vi då jämför x^3-termerna så får vi $-2=-2a+b=-2+b$ så $b=0$. Alltså är

$$x^4-2x^3+x^2+2x-2 = (x^2-2x+2)(x^2-1).$$

Övriga nollställen är nu nollställen till x^2-1, dvs. -1 och 1. Sammantaget får vi att

$$x_1 = 1+i,\ x_2 = 1-i,\ x_3 = 1,\ x_4 = -1$$

är samtliga fyra nollställen till polynomet. □

I det sista exemplet så hade vi ett fjärdegradspolynom och fick fyra nollställen. För ett andragradspolynom vet vi att vi alltid får två nollställen, om man räknar fallet då uttrycket under rottecknet blir 0 (dubbelrot) dubbelt. Är det så att antalet nollställen till ett polynom alltid är samma som graden? Ja, det är det och det bygger på faktorsatsen och följande viktiga sats vars bevis ligger långt utanför denna kurs.

Algebrans fundamentalsats. Varje polynom har minst ett komplext nollställe.

Antag att vi t.ex. har ett fjärdegradspolynom $p(x)$. Detta har ett nollställe r_1 enligt satsen och vi kan därmed faktorisera $p(x) = (x-r_1)q_1(x)$ där $q_1(x)$ är ett polynom av grad 3. Nu har ju $q_1(x)$ ett nollställe r_2 enligt satsen. Vi kan återigen faktorisera

$q_1(x) = (x - r_2)q_2(x)$ där $q_2(x)$ är ett polynom av grad 2. Nu har ju $q_2(x)$ ett nollställe r_3 enligt satsen. Vi kan återigen faktorisera $q_2(x) = (x - r_3)q_3(x)$ där $q_3(x)$ är ett polynom av grad 1. Polynomet $q_3(x)$ har ett nollställe r_4 så $q_3(x) = c(x - r_4)$ för någon konstant c och vi får till slut

$$p(x) = c(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4).$$

Samma resonemang kan man nu göra för polynom av vilken grad som helst och får då exakt samma antal nollställen (räknade med multiplicitet) som graden av polynomet.

5.2.2 Trigonometriska additionsformler

Innan vi tittar på ekvationer som innehåller trigonometriska funktioner behöver vi gå igenom de trigonometriska additions- och subtraktionsformlerna.

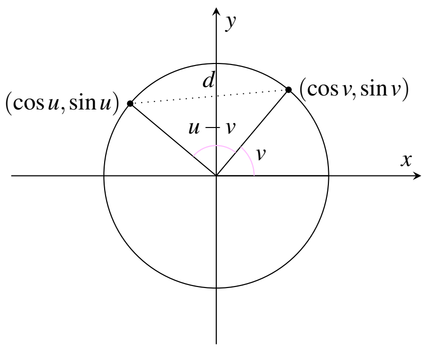
I allmänhet är $\sin(u+v)$ ej lika med $\sin u + \sin v$. T.ex. $u = v = 30°$ ger

$$\sin(u+v) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{medan} \quad \sin u + \sin v = 2 \cdot \sin 30° = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Istället gäller följande formler (som också är bra att kunna utantill):

$$\begin{aligned}
\sin(u+v) &= \sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v \\
\sin(u-v) &= \sin u \cdot \cos v - \cos u \cdot \sin v \\
\\
\cos(u+v) &= \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v \\
\cos(u-v) &= \cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v \\
\\
\tan(u+v) &= \tfrac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \cdot \tan v} \\
\\
\tan(u-v) &= \tfrac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \cdot \tan v}
\end{aligned}$$

Vi visar först formeln för $\cos(u-v)$ med hjälp av cosinussatsen från kapitel 3 i del 1. Tag punkter $P = (x_1, y_1)$ och $Q = (x_2, y_2)$ på enhetscirkeln så att $(x_1, y_1) = (\cos u, \sin u)$ och $(x_2, y_2) = (\cos v, \sin v)$. Då är $x_1^2 + y_1^2 = 1$ och $x_2^2 + y_2^2 = 1$.



Figur 2: Använder cosinussatsen på den avbildade triangeln.

Tillämpa cosinussatsen på triangeln $\triangle OPQ$. Det ger

$$d^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(u - v).$$

Med avståndsformeln fås också

$$\begin{aligned} d^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\ &= x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2 \\ &= (x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) - 2(x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2) \\ &= 1 + 1 - 2(\cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v). \end{aligned}$$

En jämförelse av de två uttrycken för d^2 ger

$$2 - 2 \cdot \cos(u - v) = 2 - 2(\cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v)$$

vilket förenklas till formeln för $\cos(u - v)$.

Formeln för $\cos(u - v)$ kan sedan utnyttjas för att bevisa de övriga formlerna. Vi lämnar detaljerna till läsaren och ger endast en fingervisning till hur det kan göras. För cosinus av en summa använder man

$$\cos(u + v) = \cos(u - (-v)) = \cos u \cdot \cos(-v) + \sin u \cdot \sin(-v),$$

och utnyttjar att $\cos(-v) = \cos v$ och $\sin(-v) = -\sin v$. För att bevisa formlerna för sinus så kan man utgå ifrån

$$\sin(u + v) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (u + v)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - u\right) - v\right).$$

Slutligen för att bevisa formlerna för tangens så startar man med

$$\tan(u + v) = \frac{\sin(u + v)}{\cos(u + v)}$$

och utnyttjar formlerna för sinus och cosinus.

Exempel. Beräkna $\sin 75^\circ$ exakt.

Lösning: Vi utnyttjar additionsformeln för sinus och får

$$\begin{aligned} \sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\left(\sqrt{3} + 1\right)\sqrt{2}}{4} = \frac{\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)}{4}. \end{aligned}$$

Med additions- och subtraktionsformlerna kan man alltså beräkna de trigonometriska funktionerna exakt för fler värden. □

Genom att sätta $u = v$ i summaformlerna får man direkt formler för dubbla vinkeln.

$$
\begin{aligned}
\sin 2u &= 2 \cdot \sin u \cdot \cos u \\
\tan 2u &= 2 \tan u / (1 - \tan^2 u) \\
\cos 2u &= \cos^2 u - \sin^2 u \\
\cos 2u &= 2\cos^2 u - 1 \\
\cos 2u &= 1 - 2\sin^2 u
\end{aligned}
$$

De två sista följer av den första formeln för $\cos 2u$ med hjälp av trigonometriska ettan.

Vi kan också använda formeln för en summa av två vinklar för att lösa ekvationer av typen $a\sin(v) + b\cos(v) = c$. Det vi ska göra är att försöka skriva om vänsterledet på formen $A\sin(u+v)$, där vi kan beräkna båda A och u, och därmed behålla v som den enda okända variabeln.

Med hjälp av additionsformeln för sinus får vi;

$$A\sin(u+v) = A(\cos(u)\sin(v) + \sin(u)\cos(v)) = A\cos(u)\sin(v) + A\sin(u)\cos(v)$$

Vi jämför nu detta med vårt ursprungliga vänsterled $a\sin(v) + b\cos(v)$ och ser att vi måste ha

$$\begin{cases} A\cos(u) = a \\ A\sin(u) = b \end{cases}$$

Om vi använder den trigonometriska ettan så ser vi att

$$
\begin{aligned}
a^2 + b^2 &= (A\cos(u))^2 + (A\sin(u))^2 \\
&= A^2\cos^2(u) + A^2\sin^2(u) \\
&= A^2(\cos^2(u) + \sin^2(u)) \\
&= A^2 \cdot 1 \\
&= A^2
\end{aligned}
$$

Vi får nu ut ett värde på A, nämligen $A = \sqrt{a^2 + b^2}$. Observera att även den negativa roten uppfyller ekvationen, men att det kommer ge samma svar i slutändan. Vi kan därmed lösa ut u ur någon av ekvationerna

$$\begin{cases} A\cos(u) = a \\ A\sin(u) = b \end{cases}$$

Så vi får därför

$$\begin{cases} \cos(u) = a/A \\ \sin(u) = b/A \end{cases}$$

Observera att den bara finns en vinkel mellan 0 och 2π som uppfyller båda ekvationerna. Vi har alltså kommit fram till följande:

$$a \sin v + b \cos v = A \sin(u + v)$$

där $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ och $0 \leq u < 2\pi$ uppfyller $\cos(u) = a/A$ och $\sin(u) = b/A$.

5.2.3 Trigonometriska ekvationer

Om (x, y) är en given punkt på enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$, så är (enligt definition) $\cos v = x$ och $\sin v = y$ (se avsnitt 3.6 i del 1). Omvänt, om värdena för $\cos v$ och $\sin v$ båda är givna, så är punkten (x, y) entydigt bestämd och vinkeln v bestämd med undantag av en multipel av 2π, dvs. med undantag av ett antal hela varv. Om däremot endast $\cos v = a$ är givet, så kan vinkeln v ligga i två olika kvadranter, en i övre och en i undre halvplanet, ty $\cos(-v_0) = \cos v_0$. Analogt, om endast $\sin v = b$ är givet, så kan v ligga antingen i högra eller vänstra halvplanet, ty $\sin(\pi - v_0) = \sin v_0$.

Exempel. Lös ekvationen $\sin v = 1/2$.

Lösning: Vi vet ifrån avsnittet om trianglar och trigonometri att $\sin(\pi/6) = 1/2$. Därmed är $v_1 = \pi/6$ en lösning till ekvationen. Eftersom $\sin(\pi - v) = \sin v$ så är även $v_2 = \pi - \pi/6 = 5\pi/6$ en lösning till ekvationen. Dessutom kan man ju alltid ändra en vinkel med ett helt antal varv så att $v_1 + 2\pi$, $v_1 + 4\pi$, $v_1 + 6\pi, \ldots$ är alla lösningar till ekvationen liksom $v_1 - 2\pi$, $v_1 - 4\pi$, $v_1 - 6\pi, \ldots$. Samma sak om man byter ut v_1 mot v_2. Vi får alltså att samtliga lösningar till ekvationen är

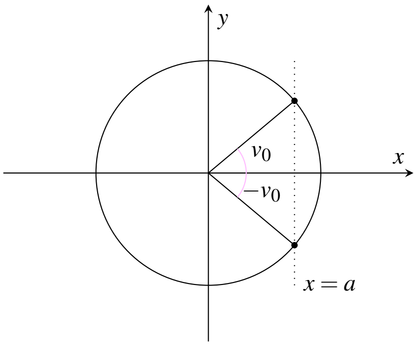
$$v = \begin{cases} \pi/6 + n \cdot 2\pi \\ 5\pi/6 + n \cdot 2\pi, \end{cases}$$

där n är ett godtyckligt heltal. □

En lösning, såsom $v = \pi/6$ i exemplet ovan, kallas för en **specifik lösning** och mängden av alla lösningar kallas för den **allmänna lösningen**. Vi ska nu ange formler för den allmänna lösningen för ekvationer som innehåller cosinus, sinus respektive tangens. (För cotangens kan man utnyttja att $\cot x = \frac{1}{\tan x}$.)

Ekvationen $\cos v = a$, där $-1 \leq a \leq 1$, har allmänna lösningen

$$v = \begin{cases} v_0 + n \cdot 2\pi \\ -v_0 + n \cdot 2\pi, \end{cases}$$



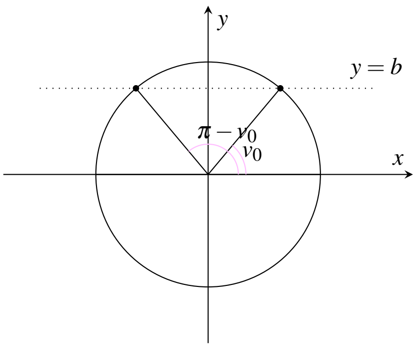
Figur 3: Lösningarna till $\cos v = a$.

där n är ett godtyckligt heltal och v_0 är en vinkel som satisfierar ekvationen $\cos v_0 = a$. Lösningarna kan erhållas genom skärning av enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$ med räta linjen $x = a$. Ovanstående kan också formuleras (med $v_0 = u$) som

$$\cos v = \cos u \Leftrightarrow v = \pm u + n \cdot 2\pi$$

Ekvationen $\sin v = b$, där $-1 \leq b \leq 1$, har allmänna lösningen

$$v = \begin{cases} v_0 + n \cdot 2\pi \\ \pi - v_0 + n \cdot 2\pi, \end{cases}$$



Figur 4: Lösningarna till $\sin v = b$.

där n är ett godtyckligt heltal och v_0 är en vinkel som satisfierar ekvationen $\sin v_0 = b$. Lösningarna kan erhållas genom skärning av enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$ med räta linjen $y = b$. Detta kan också formuleras (med $v_0 = u$) som

$$\sin v = \sin u$$

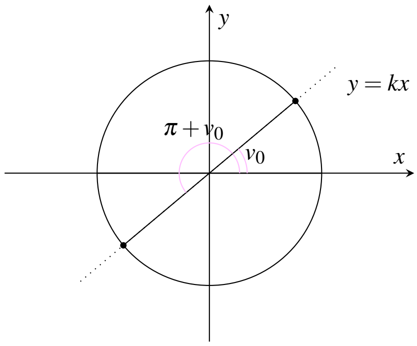
om och endast om

$$v = u + n \cdot 2\pi \text{ eller } v = \pi - u + n \cdot 2\pi$$

Vi har definierat $\tan v = y/x$ och visat att $\tan v$ är periodisk med perioden π. Alltså gäller att:

Ekvationen $\tan v = k$, där $-\infty < k < \infty$, har allmänna lösningen

$$v = v_0 + n \cdot \pi$$



Figur 5: Lösningarna till $\tan v = k$.

där n är ett godtyckligt heltal och v_0 är en vinkel som satisfierar ekvationen $\tan v_0 = k$. Lösningarna kan fås genom skärning av enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$ med räta linjer $y = kx$. Detta kan också formuleras (med $v_0 = u$):

$$\tan v = \tan u \Leftrightarrow v = u + n \cdot \pi$$

Exempel. Lös ekvationen $\sin(2v+1) = 1/2$.

Sätt $2v+1 = t$ och lös först ekvationen $\sin t = 1/2$. En lösning är

$$t_0 = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} = 30^\circ,$$

så allmänna lösningen blir

$$t = \begin{cases} t_0 + n \cdot 2\pi = \pi/6 + n \cdot 2\pi \\ \pi - t_0 + n \cdot 2\pi = 5\pi/6 + n \cdot 2\pi. \end{cases}$$

Vi får till slut genom att sätta in detta i $2v+1 = t$ och lösa ut v att

$$v = (t-1)/2 = -1/2 + t/2 = \begin{cases} -1/2 + \pi/12 + n \cdot \pi \\ -1/2 + 5\pi/12 + n \cdot \pi. \end{cases}$$

Exempel på lösningar får man genom att ersätta n med olika heltal. Om vi t.ex. sätter $n = 1$ i de två olika fallen så får vi lösningarna $v = -1/2 + 13\pi/12$ och $v = -1/2 + 17\pi/12$. □

Exempel. Lös ekvationen $\cos 3v + \cos v = 0$.

Vi kan skriva om ekvationen som

$$\cos 3v = \cos(v+\pi), \text{ ty } \cos(v+\pi) = -\cos v.$$

Därmed har vi skrivit den på formen $\cos w = \cos u$ och som vi såg ovan så är detta sant om och endast om $w = \pm u + n\cdot 2\pi$. Det ger

$$\cos 3v = \cos(v+\pi) \Leftrightarrow 3v = \pm(v+\pi) + n\cdot 2\pi.$$

Vi delar upp i två olika fall beroende på teckenvalet i högerledet.

Fall 1: Ekvationen $3v = +(v+\pi) + n\cdot 2\pi$ ger $2v = \pi + n\cdot 2\pi$, dvs.

$$v = \pi/2 + n\cdot\pi,$$

där n är ett godtyckligt heltal.

Fall 2: Ekvationen $3v = -(v+\pi) + n\cdot 2\pi$ ger $4v = -\pi + n\cdot 2\pi$, dvs.

$$v = -\pi/4 + n\cdot \pi/2 = +\pi/4 + m\cdot\pi/2,$$

där $m = (n-1)$ är ett godtyckligt heltal.

Svar: $v = \pi/2 + n\cdot\pi$ och $v = \pi/4 + n\cdot\pi/2$ där $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. $\square$

Anmärkning: Vi kunde också (i exemplet ovan) använt formeln $\cos(\pi - v) = -\cos v$. (Genomför räkningen och jämför svaren!)

Exempel. Lös ekvationen $\sin v + \sqrt{3}\cdot\cos v = 0$.

Ekvationen kan skrivas $\tan v = -\sqrt{3}$ efter division med $\cos v$, ty $\tan v = \sin v/\cos v$. Det är inga problem med att dividera med $\cos v$, ty om $\cos v = 0$ så är $\sin v$ antingen 1 eller -1 och detta ger ingen lösning till ekvationen.

Denna ekvation har en lösning $v_0 = -\pi/3 = -60°$, ty $\tan(-\pi/3) = -\tan(\pi/3) = -\sqrt{3}$. Allmänna lösningen blir då $v = v_0 + n\pi = -\pi/3 + n\cdot\pi$, där n godtyckligt heltal. [Alternativ formulering av svaret är: $v = 2\pi/3 + m\cdot\pi$, (där $m = n-1$)]. $\square$

Hittills har vi skrivit om ekvationen så att den blev på formen $\cos v = a$ eller $\cos u = \cos v$ (eller med sin eller tan). Man kan också lösa ekvationer där det är polynom av en trigonometrisk funktion $\cos v$, dvs. ekvationer som innehåller termer av typen $c(\cos v)^n$. Strategin är då att först ersätta $\cos v$ med t och bestämma lösningarna för polynomekvationen med t som obekant. Därefter bestämmer man v genom att lösa $\cos v = t$ för alla lösningar t till polynomekvationen. Här är det viktigt att komma ihåg att $|\cos v| \leq 1$ och $|\sin v| \leq 1$.

Exempel. Lös ekvationen $2(\cos v)^2 - \cos v = 3$.

Sätt $\cos v = z$. Kom ihåg att det betyder att $|z| \leq 1$. Då fås andragradsekvationen $2z^2 - z = 3$, dvs. $z^2 - 1/2\cdot z - 3/2 = 0$ med rötterna

$$z_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{2}} = \frac{1}{4} \pm \frac{5}{4}, \text{ dvs. } z_1 = \frac{3}{2} \text{ och } z_2 = -1.$$

Den första lösningen $z_1 = 3/2$ är orimlig, ty $|z| \leq 1$. Den andra lösningen $z_2 = -1$ ger ekvationen $\cos v = -1$ med allmän lösning

$$v = \pm\pi + n \cdot 2\pi = \pi + n \cdot 2\pi,$$

eftersom $-\pi$ och π skiljer sig åt med ett helt varv och därmed ger samma lösningar.

Svar: $v = \pi + n \cdot 2\pi$. □

Exempel. Lös ekvationen $\sin^5 v + \sin^3 v = 2$.

Eftersom $\sin v \leq 1$ för alla v, så är

$$\sin^5 v + \sin^3 v \leq 1^5 + 1^3 = 2$$

med likhet endast för $\sin v = 1$. Alltså är $\sin v = 1$ enda möjligheten, dvs. samtliga lösningar till ekvationen ges av $v = \pi/2 + n \cdot 2\pi$. □

5.2.4 Ekvationer med exponentialfunktioner

Precis som för trigonometriska funktioner går det att lösa (enkla) ekvationer som innehåller exponentialfunktioner. Här handlar det om strängt växande eller avtagande funktioner som antar alla positiva reella tal som värden och som inte antar några negativa värden. Detta ger följande grundläggande regler:

Ekvationen $b^x = a$ (med $b > 0$ och $b \neq 1$) har en unik lösning $x = \log_b a$ om $a > 0$ men saknar lösning om $a \leq 0$.

Likheten $b^x = b^y$ gäller om och endast om $x = y$.

Vi kan alltid uttrycka $\log_b a$ med hjälp av, t.ex., den naturliga logaritmen genom likheten

$$x = \log_b a = \frac{\ln a}{\ln b},$$

som följer av logaritmlagarna.

Med hjälp av potensreglerna kan man ibland skriva om en ekvation som innehåller exponentialfunktioner så att den blir på den grundläggande formen $b^x = a$. Kom speciellt ihåg här att $b^{x+y} = b^x b^y$.

Exempel. Lös ekvationen $2^x + 2^{x-1} = 6$.

Potensreglerna ger att $2^x = 2 \cdot 2^{x-1}$. Därmed kan ekvationen skrivas som $2^{x-1}(2+1) = 6$, dvs. $2^{x-1} = 2$. Det ger att $x - 1 = 1$, dvs. $x = 2$.

En alternativ lösningsmetod är att sätta $2^x = z$. Testa själv att lösa ekvationen på detta sätt. □

Precis som för trigonometriska funktioner så kan man ibland lösa ekvationer som innehåller olika potenser av en exponentialfunktion. Vi påminner här om att $(b^x)^k = b^{kx}$.

Exempel. Bestäm reella lösningar till ekvationen $e^{2x} + e^x - 2 = 0$.

Sätt $e^x = z$. Då är $e^{2x} = (e^x)^2 = z^2$ och vi får ekvationen $z^2 + z - 2 = 0$ med rötter

$$z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}, \text{ dvs. } z_1 = 1 \text{ och } z_2 = -2.$$

Vi delar upp i två olika fall för de två olika lösningarna.

Fall 1: Om $z = z_1$, så får vi $e^x = z_1 = 1 = e^0$ vilket ger $x_1 = 0$.

Fall 2: Om $z = z_2$, så får vi $e^x = z_2 = -2$ vilket är en orimlighet, då $e^x > 0$ för alla reella x.

Svar: Ekvationen har den enda reella roten $x_1 = 0$. □

Exempel. Lös ekvationen $2 \cdot 2^x - 2^{2x} = 0$.

Vi skriver om ekvationen med potensreglerna till $2^{x+1} = 2^{2x}$. Detta gäller om och endast om $x + 1 = 2x$, dvs. $x = 1$.

Även denna går att lösa genom att sätta $2^x = z$. Testa återigen själv att göra detta. □

5.2.5 Ekvationer med logaritmfunktioner

Problemet att lösa ekvationer som innehåller logaritmfunktioner, $\log_b x$ (se avsnittet om logaritmer i del 1), påminner en hel del om att lösa ekvationer som innehåller exponentialfunktioner. Här handlar det om strängt växande funktioner om $b > 1$, respektive strängt avtagande om $b < 1$. Logaritmerna är definierade för alla positiva reella tal och värdemängden är alla reella tal. Detta ger följande grundläggande regler:

Ekvationen $\log_b x = a$ har alltid en unik lösning $x = b^a > 0$.
Likheten $\log_b x = \log_b y$ gäller om och endast om $x = y$.

När man ska lösa ekvationer som innehåller logaritmfunktioner så är det viktigt att man har de olika reglerna för logaritmer i färskt minne. Titta tillbaka på avsnitt 4.6.2 om logaritmer i del 1 av kursen om du inte känner dig säker på dessa.

Exempel. Lös ekvationen $\lg(x^2) = 2$.

Vi sätter $t = x^2$ och får då $\lg t = 2$. Det ger (kom ihåg att lg är $\log_{10}$) $t = 10^2 = 100$. Vi satte $t = x^2$ och får alltså lösningarna $x_1 = 10$ och $x_2 = -10$.

En liten varning är på sin plats här. Det är kanske frestande att skriva om $\lg(x^2)$ som $2\lg x$, men observera att dessa bara är lika om $x > 0$ och att man i så fall tappar bort lösningen -10. □

Strategin när man har flera logaritmfunktioner är att utnyttja logaritmreglerna för att skriva det som en likhet på formen $\ln u = \ln v$ där u och v beror på x.

Exempel. Lös ekvationen $2\ln(x-1) + \ln(x+1) = 3\ln x$.

För att logaritmerna i ekvationen skall vara definierade måste $x - 1 > 0$, $x + 1 > 0$ och $x > 0$, dvs. $x > 1$.

För $x > 1$ kan vänsterledet av ekvationen skrivas som

$$2\ln(x-1) + \ln(x+1) = \ln(x-1)^2 + \ln(x+1) = \ln\big((x-1)^2(x+1)\big)$$

och högerledet som $3\ln x = \ln x^3$. Härav fås

$$(x-1)^2(x+1) = x^3, \text{ dvs. } x^3 - x^2 - x + 1 = x^3 \text{ eller } x^2 + x - 1 = 0.$$

Denna ekvation har rötterna

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}6 < 1 \text{ och } x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \approx -1{,}6 < 1.$$

Därmed ligger både x_1 och x_2 utanför definitionsområdet $x > 1$.

Svar: Den givna ekvationen saknar (reella) rötter. □

Anmärkning: Om vi ändrar förra ekvationen till $\ln(x-1)^2 + \ln(x+1) = 3\ln x$ så får vi något som är definierat för alla $x > 0$ utom $x = 1$. Den är ekvivalent till den ursprungliga ekvationen för $x > 1$, men har alltså ett större definitionsområde eftersom $(x-1)^2 > 0$ för $x \neq 1$. Denna nya ekvation har roten $x_1 = (\sqrt{5}-1)/2 \approx 0{,}618$.

5.2.6 Ekvationer med absolutbelopp

När det gäller ekvationer som innehåller absolutbelopp är det viktigt att följa den allmänna strategi vi ordinerade för absolutbelopp i avsnitt 4.4 i del 1. Vi påminner om att det gäller att *dela upp i olika fall* beroende på tecknet på det som man tar absolutbelopp av för att eliminera absolutbeloppen. Därefter löser man ekvationerna som vanligt, men man måste hela tiden ha i åtanke vilket intervall det är man jobbar med. Vi illustrerar med ett par exempel.

Exempel. Lös ekvationen $|x-3| + |2x+1| = 5$.

Vi har

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{för } x \geq 3, \\ -(x-3) & \text{för } x < 3, \end{cases}$$

och

$$|2x+1| = \begin{cases} 2x+1 & \text{för } 2x+1 \geq 0, \text{ dvs. } x \geq -1/2, \\ -(2x+1) & \text{för } x < -1/2. \end{cases}$$

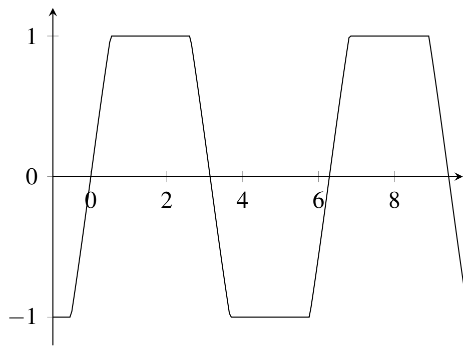
Vi måste alltså studera 3 olika fall:

Fall 1, $x \geq 3$: I detta intervall fås ekvationen $(x-3) + (2x+1) = 5$, dvs. $3x = 7$ som ger $x = 7/3$. Men $7/3 < 3$, dvs. $7/3$ ligger inte i det rätta intervallet, varför $x = 7/3$ inte är en rot till den givna ekvationen.

Fall 2, $-1/2 \leq x < 3$: Här fås ekvationen $-(x-3) + (2x+1) = 5$, som ger $x = 1$. Vi finner att $x = 1$ ligger i intervallet $-1/2 \leq x < 3$ och är alltså en rot. (Pröva genom insättning i den givna ekvationen!)

Fall 3, $x < -1/2$: Nu fås $-(x-3) - (2x+1) = 5$, som ger $x = -1$. Nu ser vi att $x = -1$ ligger i rätt intervall och är alltså en rot.

Svar: Ekvationen $|x-3|+|2x+1|=5$ har rötterna $x_1 = 1$ och $x_2 = -1$. $\square$



Figur 6: Centrala delen av grafen av till funktionen $f(x) = \left|\sin x + \frac{1}{2}\right| - \left|\sin x - \frac{1}{2}\right|$

Exempel. Lös ekvationen $\left|\sin x + \frac{1}{2}\right| = \left|\sin x - \frac{1}{2}\right|$.

För enkelhets skull så börjar vi med att sätta $\sin x = t$. Kom ihåg att det betyder ju nu att $|t| \leq 1$.

Vi har

$$\left|t+\frac{1}{2}\right| = \begin{cases} t+\frac{1}{2} & \text{för } -\frac{1}{2} \leq t \leq 1, \\ -(t+\frac{1}{2}) & \text{för } -1 \leq t < -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

och

$$\left|t-\frac{1}{2}\right| = \begin{cases} t-\frac{1}{2} & \text{för } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \\ -(t-\frac{1}{2}) & \text{för } -1 \leq t < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Vi måste alltså återigen studera 3 olika fall:

Fall 1, $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$: I detta intervall fås ekvationen $t+\frac{1}{2} = t-\frac{1}{2}$, dvs. $\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ vilket är en orimlighet. Alltså inga lösningar i detta fallet.

Fall 2, $-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$: Nu fås ekvationen $t+\frac{1}{2} = -(t-\frac{1}{2})$, som ger $t = 0$. Vi finner att $t = 0$ ligger i intervallet $-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$ och är alltså en rot.

Fall 3, $-1 \leq t \leq -\frac{1}{2}$: I detta fall fås samma ekvation som i första fallet (ombytt tecken på båda sidor) och alltså en orimlighet.

Enda lösningen är alltså $t = 0$. Från $\sin x = t$ får vi då till slut att alla lösningar ges av $x = n \cdot \pi$ med n ett godtyckligt heltal. Grafen till funktionen $\left|\sin x + \frac{1}{2}\right| - \left|\sin x - \frac{1}{2}\right|$ finns i figur 6 och man kan se nollställena till denna (som ju svarar mot rötter till vår ekvation) vid alla multipler av π. $\square$

Övningar

5.2.1 Lös följande ekvationer.

a. $x^2+2x+2=0$

b. $5x^2+3x+1=0$

c. $3x^2+1=3x$

5.2.2 Följande polynom har $x = 1+i$ som nollställe. Bestäm alla nollställen till polynomen.

a. $x^3 - x^2 + 2$ b. $x^4 - x^3 + x^2 + 2$

5.2.3 Bestäm ett fjärdegradspolynom som har nollställen i $3-i, 3+i,\ 1+3i$ samt $1-3i$.

5.2.4 Lös följande ekvationer.

a. $\cos v = 1/2$ b. $\sin 2v = 1/2$
c. $\cos v = 0$ d. $\sin v = 2$
e. $\sin(3v-1) = -1$

5.2.5 Lös följande ekvationer.

a. $\cos(\pi/2 - v) = \cos 2v$ b. $\sin 3v = \sin v$
c. $\sin 3v + \sin v = 0$

5.2.6 Lös följande ekvationer.

a. $2 \cdot \sin^2 v = 1$ b. $5\sin v - 6\sin^2 v = 1$
c. $2\cos^3 v - 3\cos^2 v - 3\cos v + 2 = 0$ d. $\cos v + \cos^4 v = 2$
e. $\sin v + \sin^3 v = 3$

5.2.7 Bestäm alla reella lösningar till följande ekvationer.

a. $2^x = 64$ b. $4^x = 8$
c. $4^x = -8$ d. $5^{x+1} + 3 \cdot 5^x = 8$
e. $3^x + 2 \cdot 3^{x-1} = 45$

5.2.8 Bestäm alla reella lösningar till följande ekvationer.

a. $e^{2x} + 2 \cdot e^x = 3$ b. $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$
c. $2^{2x} + 2^{x+1} = 2^{x-1} + 1$

5.2.9 Lös följande ekvationer.

a. $\ln(\ln x) = \ln 3$ b. $2\lg(x-1) + \lg 2 = 3\lg 4$
c. $3\ln 2 + \ln(x-1) - \ln x = \ln 7$ d. $\lg x + \lg(x-2) = \lg 3$
e. $\ln(2-x) + 2\ln x = 3\ln(1-x)$

5.2.10 Lös följande ekvationer.

a. $|x+1| = 1$ b. $|3-x| = 7,5$
c. $|x+4| = 0$

5.2.11 Lös följande ekvationer.

a. $|x-2| + |x+1| = 4$ b. $|x-2| + |x+1| = 3$
c. $|2^x - 2| = |2^x - 4|$ d. $|\lg(2x)| = |\lg(x)|$

5.3 Olikheter

Givet två reella tal a och b uppfylls exakt en av relationerna $a < b$, $a = b$ och $a > b$. Detta till synes enkla och uppenbara faktum ligger till grund för att vi alls kan tala om olikheter för reella tal. Frågan är naturligtvis ganska trivial när det handlar om två givna reella tal, det är bara att jämföra dem och se vilket som är störst (även om det kan vara ganska jobbigt att göra det utan tekniska hjälpmedel, försök visa olikheten

$\sqrt[3]{413} > 6 + \sqrt[3]{3}$ “för hand”). Betydligt intressantare blir det om man har som uppgift att jämföra storheter som är beroende av en eller flera variabler. I avsnittet som följer ska vi titta närmare dels på vissa allmänna frågor om olikheter, dels på vissa speciella typer av olikheter och hur man handskas med dem. Innan man fortsätter läsa och räkna här kan det vara bra att repetera räknereglerna som finns listade i avsnitt 1.4.2.

Förutom de sedvanliga tecknen för mindre än och större än ($<, >$) ser man ofta tecknen $\leq$ respektive $\geq$. De betyder **mindre än eller lika med**, respektive **större än eller lika med**. Olikheten $5 \geq 5$ är sann, medan $5 > 5$ är falsk. Olikheter som innehåller tecknen $<, >$ kallas för **stränga olikheter**.

De typiska problemen man ställs inför är: att lösa olikheter, att bevisa olikheter och att göra uppskattningar. Vi ska gå igenom vad dessa tre typer av problem är och hur man kan lösa dem.

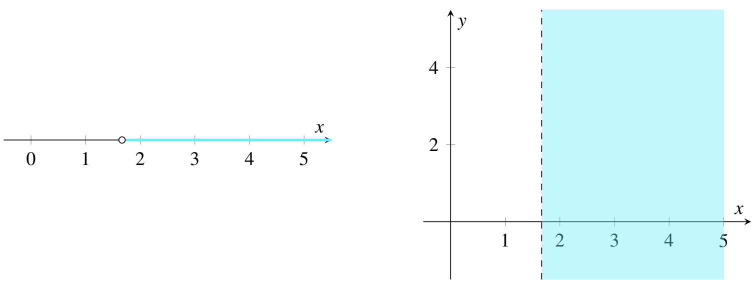
5.3.1 Att lösa olikheter

Detta är helt analogt med att lösa ekvationer. Att lösa en olikhet betyder just att hitta alla värden på en (eller flera) variabler som uppfyller en olikhet. Vi ska titta på tre konkreta exempel på att lösa en olikhet.

Exempel. Lös olikheten $-3x+5 < 0$ i $\mathbb{R}$, dvs. finn alla reella tal x sådana att $-3x+5 < 0$.

Enligt räknereglerna för olikheter (se avsnitt 1.4.2) får vi en olikhet ekvivalent med den givna om vi adderar -5 till båda leden: $-3x < -5$. Återigen i enlighet med räknereglerna kan vi dividera båda leden med -3. Vi får en olikhet ekvivalent med den givna, förutsatt att vi byter riktning på olikhetstecknet (eftersom $-3 < 0$). Vi får alltså att olikheten som skulle lösas är ekvivalent med $x > 5/3$. Alltså består dess lösningsmängd av alla reella tal som är större än $5/3$.

Alternativt hade vi kunnat addera $3x$ till båda leden för att sedan lösa $3x > 5$. □



Figur 7: Lösningsmängden till olikheten $-3x+5 < 0$ i $\mathbb{R}$ respektive $\mathbb{R}^2$.

Exempel. Lös olikheten $-3x+5 < 0$ i $\mathbb{R}^2$, dvs. finn alla reella talpar (x, y) sådana att $-3x+5 < 0$.

Om vi följer räknereglerna på precis samma sätt som ovan får vi återigen att $x > 5/3$. Att y inte står någonstans betyder att det inte är några restriktioner för y. Lösningsmängden är därmed alla punkter i planet med x-koordinat större än $5/3$ och godtycklig y-koordinat, dvs. alla punkter i planet till höger om den vertikala linjen $x = 5/3$ (en sådan mängd kallas för ett halvplan). □

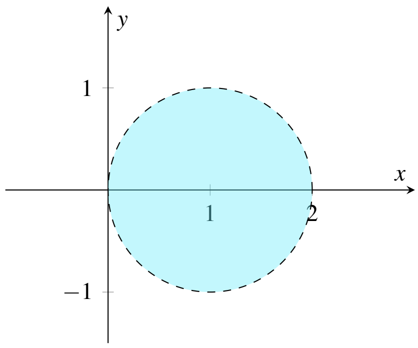
Exemplen ovan visar bland annat att lösningsmängden kan se olika ut beroende på valet av "bakgrundsmängd", även om olikheterna som sådana förefaller identiska.

Exempel. Lös olikheten $x^2 + y^2 < 2x$ i $\mathbb{R}^2$.

Uttrycken som ingår i vänster- och högerledet påminner starkt om uttrycken som brukar ingå i en cirkels ekvation (se avsnitt 3.5). Vi börjar därför med att flytta över alla termer till vänsterledet och kvadratkomplettera. Den olikhet vi får är ekvivalent med den givna:

$$x^2 + y^2 - 2x = (x-1)^2 + y^2 - 1 < 0.$$

Om vi nu adderar 1 till båda leden får vi $(x-1)^2 + y^2 < 1$, ytterligare en olikhet, ekvivalent med den ursprungliga. Enligt avståndsformeln består lösningen av alla punkter i planet ($\mathbb{R}^2$) som befinner sig på avstånd mindre än ett från punkten $(1,0)$, dvs. lösningsmängden är cirkelskivan med medelpunkt $(1,0)$ och radie 1 (utan den avgränsande cirkeln). $\square$



Figur 8: Lösningsmängden till olikheten $x^2 + y^2 < 2x$ i $\mathbb{R}^2$.

5.3.2 Att bevisa olikheter

Denna typ av problem har en stark koppling till att lösa en olikhet. Man skulle kunna omformulera det som "Visa att alla element i en mängd tillhör olikhetens lösningsmängd."

Exempel. Visa att

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad \text{för alla } a,b \geq 0.$$

Olikheten är ekvivalent med $a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0$ (vilka räkneregler har vi använt?). Eftersom a och b är icke-negativa har vi att $a = \left(\sqrt{a}\right)^2$, $b = \left(\sqrt{b}\right)^2$. Vi kan med hjälp av kvadreringsregeln skriva om det nya vänsterledet som

$$a + b - 2\sqrt{ab} = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2.$$

Den givna olikheten är alltså ekvivalent med olikheten $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$, som uppenbarligen är sann för alla icke-negativa a och b. Likhet gäller om och endast om

$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 = 0$, dvs. om och endast om $a = b$. Med andra ord är $(a+b)/2 = \sqrt{ab}$ om och endast om $a = b$. $\square$

Den nyss bevisade olikheten kallas för olikheten mellan aritmetiskt och geometriskt medelvärde. Det **aritmetiska medelvärdet** är det "vanliga" medelvärdet där man summerar talen och delar med antalet tal. Det **geometriska medelvärdet** av två icke-negativa tal är roten ur deras produkt, och mer allmänt så är geometriska medelvärdet av n icke-negativa tal lika med n-te roten ur deras produkt. Det aritmetiska medelvärdet är större än eller lika med det geometriska medelvärdet också för godtyckligt antal icke-negativa tal, dvs.

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \;\text{ för alla }\; a_1,a_2,\ldots,a_n \geq 0.$$

Likhet gäller om och endast om alla talen är lika med varandra. Den mer generella varianten är dock betydligt svårare att bevisa.

Exempel. Visa triangelolikheten för reella tal, dvs. visa att

$$|a+b| \leq |a|+|b| \;\text{ för alla }\; a,b \in \mathbb{R}.$$

Eftersom båda leden är icke-negativa är olikheten ekvivalent med den man får efter kvadrering. Dessutom gäller för reella tal att $|x|^2 = x^2$ (OBS! Gäller inte för komplexa tal!), så att den givna olikheten är ekvivalent med

$$(a+b)^2 \leq (|a|+|b|)^2,$$

och efter utveckling med hjälp av kvadreringsregeln och förenkling med

$$a^2+b^2+2ab \leq |a|^2+|b|^2+2|ab| \iff ab \leq |ab|.$$

Den sista olikheten är dock uppenbarligen sann, eftersom det råder likhet när a och b har samma tecken samt när något av talen är noll, medan vi får att vänsterledet är negativt och högerledet positivt när a och b har olika tecken. $\square$

Anmärkning. Eftersom $a-b = a+(-b)$, och $|-b| = |b|$, får vi att även olikheten

$$|a-b| \leq |a|+|b|$$

gäller för alla reella a,b.

De olikheter vi visat är mycket användbara i olika sammanhang. Vi ska här ge ett exempel på hur man kan använda olikheten mellan aritmetiska och geometriska medelvärdet för att lösa ett geometriskt problem.

Exempel. Bland alla rektanglar med omkrets 8, finn den med störst area.

Beteckna en sådan rektangels sidlängder med a och b. Då är omkretsen $2(a+b)$ och arean är är ab. Eftersom det handlar om längder måste a och b vara positiva. Att omkretsen är 8 betyder att $a+b=4$, och $(a+b)/2 \geq \sqrt{ab}$ ger att $2 \geq \sqrt{ab}$. Alltså gäller att $\text{Arean} = ab \leq 4$. En rektangel med omkretsen 8 kan alltså inte ha area större än 4. I beviset av olikheten ovan noterade vi dessutom att likhet uppnås, dvs. arean blir maximal, om och endast om $a = b$. Därmed är det kvadraten med sidan 2 som har störst area bland alla rektanglar med omkrets 8. $\square$

Exemplet ovan är ett enkelt specialfall av ett mycket intressant matematiskt problem som kallas det isoperimetriska problemet.

5.3.3 Att göra uppskattningar

Det händer ofta att man inte behöver veta eller helt enkelt inte kan ta reda på exakt vilka värden en funktion antar. Man kan ibland, alternativt är man ibland tvungen att nöja sig med en uppskattning av hur stor (eller hur liten) funktionen kan bli. Vi börjar med några exempel på grundläggande uppskattningar som kan vara användbara.

Exempel. För alla reella tal gäller följande uppskattningar

$$\begin{aligned} |\sin x| &\leq 1 \\ |\sin x| &< 100 \\ |x\sin x| &\leq |x| \\ |\sin x| &\leq |x| \\ e^x &> 0 \end{aligned}$$

För alla negativa tal gäller att $e^x < 1$. □

Man kan alltefter behov vara olika ambitiös vid valet av uppskattning. Exemplen nedan illustrerar ett sammanhang då uppskattningar kan vara aktuella. Samtidigt får vi se hur ambitionsnivån beträffande uppskattningen kan höjas när så behövs.

Exempel. Visa att funktionen

$$f(x) = \frac{1}{3-(\sin x + \cos x)}$$

är definierad för alla reella x.

Det enda som skulle kunna ställa till problem är nämnaren: den får absolut inte bli noll. Vi ska, genom att göra en uppskattning, visa att nämnaren är positiv för alla reella x. Samtidigt får vi se hur man kan använda triangelolikheten.

Vi vet att $|\sin x| \leq 1$ och $|\cos x| \leq 1$ för alla reella x. Triangelolikheten ger då att

$$|\sin x + \cos x| \leq |\sin x| + |\cos x| \leq 2 < 3,$$

och eftersom $\sin x + \cos x \leq |\sin x + \cos x|$ för alla reella x, följer det att

$$3-(\sin x + \cos x) \geq 3 - |\sin x + \cos x| > 0.$$

Nämnaren kan därmed aldrig bli noll, och vi får att funktionen är definierad för alla reella tal. □

Exempel. Visa att funktionen

$$f(x) = \frac{1}{2-(\sin x + \cos x)}$$

är definierad för alla reella x.

Precis som ovan får vi att $|\sin x + \cos x| \leq |\sin x| + |\cos x| \leq 2$, samt att

$$2-(\sin x + \cos x) \geq 2 - |\sin x + \cos x| \geq 0.$$

Men, eftersom den sista olikheten tillåter likhet, räcker inte den uppskattningen för att visa att nämnaren aldrig blir noll. Det som behövs är högre ambitionsnivå vid uppskattningen.

Man skulle kunna använda derivator för att bestämma det största värdet funktionen $g(x) = \sin x + \cos x$ kan ha. Här kommer vi dock att använda en annan metod från avsnitt 5.2.2 för att skriva $\sin x + \cos x$ på formen $A\sin(u + x)$ för något A och u.

Enligt vårt resultat från avsnitt 5.2.2 så gäller

$$a\sin x + b\cos x = A\sin(u + x)$$

då $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ och $0 \leq u < 2\pi$ är en lösning till $\cos(u) = a/A$ och $\sin(u) = b/A$. I vårt fall är $a = 1$ och $b = 1$, så $A = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ och u är en lösning till $\cos(u) = 1/\sqrt{2}$ och $\sin(u) = 1/\sqrt{2}$, dvs. vi måste ha $u = \pi/4$. Vi kan därför skriva om funktionen $g(x)$ som

$$g(x) = \cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Vi ser nu att $|g(x)| = |\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}$, och det följer att

$$2 - (\sin x + \cos x) \geq 2 - \sqrt{2} > 0.$$

Nämnaren kan alltså aldrig bli lika med noll för reella x, vilket betyder att funktionen f är definierad i hela $\mathbb{R}$. $\square$

I de båda exemplen ovan får vi en uppskattning för själva f på köpet. Eftersom nämnaren alltid är positiv är även f positiv, så vi behöver inte skriva belopptecken. Funktionen f kommer att vara som störst när nämnaren är som minst (notera att täljaren är konstant). Det betyder att funktionen från det sista exemplet uppfyller

$$0 < f(x) \leq \frac{1}{2 - \sqrt{2}}.$$

Läsaren kan själv fundera över hur motsvarande olikheter ser ut i exemplet innan, både med den "grövre" och den "finare" uppskattningen av nämnaren.

5.3.4 Rationella olikheter

I det som återstår av avsnittet kommer vi att ägna oss åt att lösa vissa typer av olikheter, där funktionerna som ingår i vänster- och högerledet är funktioner av en variabel.

Vi börjar med en mycket viktig iakttagelse: det är betydligt enklare att jämföra ett uttryck med noll, än att jämföra två uttryck med varandra. Givet t.ex. olikheten $AB < 1$ kan vi inte säga så mycket om när den gäller, medan givet $CD < 0$ kan vi genast säga att den är sann om och endast om C och D har olika tecken. Det betyder att man nästan alltid ska hålla sig till följande tumregel

> Vid behandling av olikheter, flytta alltid över termer så att ena ledet blir 0.

Nästa steg (återigen för att kunna dra nytta av iakttagelsen ovan) är att försöka faktorisera i det led där de nollskilda termerna finns, och sedan helt enkelt undersöka när de olika faktorerna är positiva och negativa. Tyvärr kan faktoriseringen vara ganska svår att genomföra i praktiken.

Det kommer nu att uteslutande handla om olikheter mellan polynom och/eller rationella funktioner. Det kan därför vara på sin plats att repetera det som står i avsnitt 4.2 och avsnitt 4.3.

Olikheter mellan polynom har utseendet

$$p_1(x) < p_2(x),$$

där p_1, p_2 är polynom. Skillnaden mellan två polynom är återigen ett polynom. Efter att ha fört över alla termer till vänsterledet får vi därför olikheten

$$p(x) < 0,$$

där p är ett polynom. Vi kan nu (åtminstone i teorin) hitta p:s nollställen, faktorisera enligt faktorsatsen för polynom (se avsnitt 2.5) och undersöka de enskilda faktorernas tecken (i praktiken kan det vara knivigt att hitta nollställena). *Observera att vi endast är intresserade av reella nollställen*, komplexa tal och olikheter går inte ihop (frågan diskuteras något utförligare i slutet av avsnittet).

Alla polynom med reella koefficienter av grad minst ett kan faktoriseras i första- och andragradsfaktorer med reella koefficienter, där andragradsfaktorerna saknar reella nollställen.

Bevis. I avsnitt 5.2.1 såg vi att de imaginära rötterna kom i par r och $\bar{r}$ och att

$$(x-r)(x-\bar{r}) = x^2 - (r+\bar{r})x + r\bar{r}$$

har reella koefficienter. Därför ger Algebrans fundamentalsats att ett polynom med reella koefficienter kan faktoriseras i reella förstagradsfaktorer som svarar mot de reella nollställena och reella andragradsfaktorer som svarar mot paren av imaginära nollställen. □

Det är lätt att bestämma förstagradsfaktorernas tecken för olika värden på variabeln x. Om någon andragradsfaktor saknar reella nollställen innebär det att den har konstant tecken över hela tallinjen (kan du förklara varför?).

Om olikheten inte är sträng kommer lösningsmängden även att innehålla alla nollställen till p. Vi illustrerar metoden med ett par exempel.

Exempel. Lös olikheten $x^2 - 3x + 2 < 0$.

Nollställena till $x^2 - 3x + 2 < 0$ är $x_1 = 1$ och $x_2 = 2$. Olikheten är alltså ekvivalent med olikheten $(x-1)(x-2) < 0$. Produkten av de två faktorerna är negativ om och endast om de har olika tecken, vilket inträffar om antingen $x < 1,\ x > 2$, eller $x > 1,\ x < 2$. Den första kombinationen är omöjlig, alltså är lösningsmängden $\{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 2\}$. □

Exempel. För vilka $x \in \mathbb{R}$ är $2x^3 < 7x^2 + 5x - 4$?

Vi för över alla termer till vänsterledet och får

$$p(x) = 2x^3 - 7x^2 - 5x + 4 < 0.$$

Ekvationen $2x^3 - 7x^2 - 5x + 4 = 0$ har rötterna $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{2}$ och $x_3 = 4$ (visa detta!). Enligt faktorsatsen är då

$$p(x) = 2x^3 - 7x^2 - 5x + 4 = 2(x+1)(x - \frac{1}{2})(x-4).$$

För att bestämma de x, för vilka $p(x) < 0$, kan vi sätta upp följande teckentabell:

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < \frac{1}{2}$	$x = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < x < 4$	$x = 4$	$x > 4$
$(x+1)$	$---$	0	$+++$	$+$	$+++$	$+$	$+++$
$(x - \frac{1}{2})$	$---$	$-$	$---$	0	$+++$	$+$	$+++$
$(x-4)$	$---$	$-$	$---$	$-$	$---$	0	$+++$
$p(x)$	$---$	0	$+++$	0	$---$	0	$+++$

I teckentabellen tog vi alla nollställen till polynomet och delade upp i intervall mellan dessa. I dessa intervall har faktorerna konstant tecken som förs in i tabellen. Vi ser att $p(x) < 0$, om $x < -1$ eller $\frac{1}{2} < x < 4$. $\square$

En olikhet mellan rationella funktioner har (efter att eventuellt ha skrivit termerna i vardera ledet på gemensam nämnare) utseendet

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} > \frac{f_2(x)}{g_2(x)},$$

där f_1, f_2, g_1, g_2 är polynom och x tillhör mängden

$$\{x \in \mathbb{R} : g_1(x) \neq 0,\ g_2(x) \neq 0\}.$$

Vi börjar med att flytta över alla termer till vänsterledet; skillnaden mellan två rationella funktioner är återigen en rationell funktion, vilket betyder att det räcker att titta på olikheter på formen

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0, \quad x \in \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\} \text{ med } f, g \text{ polynom.}$$

Den omedelbara, nästan instinktiva reaktionen när man ser olikheten ovan är att göra sig av med nämnaren, genom att förlänga med $g(x)$. Det får man inte göra! Det är nämligen så att $g(x)$ kan ha olika tecken för olika x, och man måste byta riktning på olikheten vid multiplikation med negativa storheter. En möjlighet är att i det läget undersöka g:s tecken för olika x-värden och lösa olika varianter av olikheten för $g > 0$ och $g < 0$. Detta är emellertid onödigt jobbigt; dessutom är det lätt att missa något fall och därmed lätt att få fel eller ofullständig lösningsmängd.

Exempel. För vilka reella x gäller olikheten

$$\frac{x-1}{x+2} \geq 0?$$

För $x \neq -2$, förläng med $x+2$. Olikheten ovan är därmed för alla $x \neq -2$ ekvivalent med olikheten $(x-1)(x+2) \geq 0$. För att produkten ska vara positiv måste de två faktorerna ha samma tecken. Detta inträffar då $x < 1$, $x < -2$ och då $x > 1$, $x > -2$, alltså då $x < -2$ och då $x > 1$. Eftersom likheten är tillåten, måste vi lägga till punkten $x = 1$. Vi får alltså lösningsmängden $\{x \in \mathbb{R} : x < -2 \text{ eller } x \geq 1\}$. (OBS! $x \neq -2$) $\square$

Exempel. För vilka x är $\frac{1}{x} \geq 2x - 1$?

Olikheten kan skrivas:

$$R(x) = \frac{1}{x} - 2x + 1 = \frac{1 - 2x^2 + x}{x} \geq 0.$$

Här är $R(x)$ en rationell funktion, där täljare (och nämnare) kan faktoruppdelas. Täljaren $T(x) = 1 - 2x^2 + x$ har nollställena $-1/2$ och 1, så

$$T(x) = (-2)(x + \frac{1}{2})(x - 1) = -(2x + 1)(x - 1) = (2x + 1)(1 - x)$$

och $R(x) = (2x + 1)(1 - x)/x$.

Vi får följande teckentabell:

	$x < -1/2$	$x = -1/2$	$-1/2 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$2x + 1$	$---$	0	$+++$	$+$	$+++$	$+$	$+++$
$1 - x$	$+++$	$+$	$+++$	$+$	$+++$	0	$---$
x	$---$	$-$	$---$	0	$+++$	$+$	$+++$
$R(x)$	$+++$	0	$---$	ej def.	$+++$	0	$---$

Vi ser att $R(x) \geq 0$, om $x \leq -1/2$ eller $0 < x \leq 1$. Notera att för $x = 0$ är $R(x)$ ej definierad. $\square$

Anmärkning. Man kan också skriva $R(x) = (-2)(x + 1/2)(x - 1)/x$ och bilda en teckentabell med faktorerna (-2), $(x + 1/2)$, $(x - 1)$ och x. (Gör detta!).

Vi på minner om att den givna olikheten (i exemplet ovan) inte får multipliceras med x, dvs. den får inte skrivas $1 \geq x(2x - 1)$, eftersom x kan vara negativt.

5.3.5 Intervall

Vi ser att lösningsmängderna till de olikheter vi behandlat i $\mathbb{R}$ anges av olikheter av typerna $x < a,\ x > b,\ a < x < b,\ x \leq a,\ x \geq b,\ a \leq x < b,\ a < x \leq b,\ a \leq x \leq b$. Mängder som anges på det sättet förekommer mycket ofta och de har därför fått ett namn. Alla mängder av typerna ovan kallas **intervall**. Som redan nämnts i avsnitt 1.4.1 är det lämpligt att införa beteckningar för de olika intervalltyperna som inte innehåller variabelnamnet (mängden är uppenbarligen densamma oavsett vad variabeln heter). Nedan repeteras definitionerna av alla intervalltyper.

$$
\begin{aligned}
(-\infty,a) &= \{x \in \mathbb{R} : x < a\},\\
(-\infty,a] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\},\\
[a,b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\},\\
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\},\\
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\},\\
(a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\},\\
[b,\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq b\},\\
(b,\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x > b\}.
\end{aligned}
$$

Vi ser att [respektive] används då den avgränsande punkten (den s.k. **randpunkten**) inkluderas i intervallet, medan (respektive) används då randpunkten inte inkluderas. Intervall som innehåller alla sina randpunkter kallas **slutna intervall** och sådana som inte innehåller någon av sina randpunkter kallas **öppna intervall**. De övriga är varken slutna eller öppna. Notera att de båda oändligheterna är symboler som inte tillhör $\mathbb{R}$, därmed räknas de inte som randpunkter till intervallen. Intervallen $(-\infty,a]$, $[a,b]$, $[b,\infty)$ är alltså slutna, $(-\infty,a)$, (a,b), (b,∞) är öppna och övriga är varken slutna eller öppna. I litteraturen förekommer även beteckningen $]a,b[$ för det öppna intervallet (a,b).

Som en övning, ange lösningsmängderna i alla exempel i avsnittet i termer av intervall.

5.3.6 Komplexa tal och olikheter går inte ihop!

Vi inledde avsnittet med en kommentar om vad som gör det möjligt att överhuvudtaget behandla olikheter mellan reella tal och/eller funktioner: väsentligen handlar det om att det går att tala om vänster och höger, och därmed definiera riktning på tallinjen. Man säger att man har en **ordningsrelation** på $\mathbb{R}$. Vanan att arbeta med vissa begrepp och regler gör att man ofta tenderar att se dem som självklara och mer allmängiltiga än vad de i själva verket är. Det är därför på sin plats att här lyfta ett varningens finger.

Olikheter mellan komplexa tal och/eller funktioner har ingen mening.

Att det inte låter sig göras betyder inte att ingen hittills kommit på hur man ska göra. Det betyder att man kan bevisa att det inte går att introducera en meningsfull ordningsrelation i mängden av komplexa tal. Med detta menar vi att det inte går introducera en ordningsrelation där de räknelagar vi är vana vid gäller. Man vill, t.ex., att det för alla tal x i en mängd ska gälla att $x^2 \geq 0$, men för det komplexa talet i har vi att $i^2 = -1 < 0$, vilket blir en motsägelse.

Eftersom uppskattningar fortfarande är ett mycket viktigt moment i analysen av komplexa storheter gäller det att komma ihåg att det enda man kan jämföra med olikhetstecken är komplexa tals och/eller funktioners absolutbelopp (eller mindre ofta t.ex. realdel eller imaginärdel).

Övningar

5.3.1 För vilka $x \in \mathbb{R}$ gäller följande olikheter?

a. $1 \geq 2x^2 - x$ b. $x^2 + x < 1$
c. $x^2 + 1 \leq x$ d. $x^2 > 2x - 1$
e. $x^3 + 2x > 3x^2$ f. $6x^3 < 17x^2 + 4x - 3$
g. $x + 3 \geq \frac{2x}{x-2}$ h. $(x-1)^2 \leq 3/(x+1)$
i. $1/x < x/2 < 2/x$ (studera först de båda olikheterna var för sig)

5.3.2 Ange en olikhet med ett andragradspolynom som har lösningsmängden

a. $(-2,3)$ b. $[2,5]$
c. $\{x \in \mathbb{R} : x < -2 \text{ eller } x > 5\}$ d. $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 2 \text{ eller } x \geq 3\}$.

5.3.3 Ange en olikhet med en rationell funktion som har lösningsmängden

a. $(-2,3)$ b. $[-2,3)$
c. $(-2,3]$ d. $[2,5]$
e. $\{x \in \mathbb{R} : x \leq -2 \text{ eller } x > 5\}$ f. $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 2 \text{ eller } x \geq 3\}$.

5.3.4 Vilka punkter i planet har koordinater som satisfierar följande olikheter?

a. $x - 3y > 0$ b. $2x + 3y \leq 4$
c. $x^2 + y^2 > 8$ d. $1 \leq x^2 + y^2 < 5$.

5.3.5 Visa att $t + 1/t \geq 2$ för alla $t > 0$. När uppnås likhet?

5.3.6 Avståndet mellan städerna A och B är 100 km. Två bilister startar från A samtidigt, kör från A till B, vänder direkt, och kör tillbaka till A. Den förste kör från A till B med farten 120 km/h; väl framme i B ser han en hastighetskontroll och kör tillbaka med 80 km/h. Den andre bilisten håller jämn fart 100 km/h. Vilken av de två bilisterna kommer tillbaka till A först?
Lös samma uppgift om den andre bilisten håller farten v km/h, medan den förste kör från A till B med farten v_1 km/h och tillbaka med v_2 km/h, där $v_1 + v_2 = 2v$. Om du lyckas har du kommit fram till olikheten mellan aritmetiskt och harmoniskt medelvärde:

$$\frac{a+b}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}, \quad \text{för alla} \quad a, b > 0.$$

När uppnås likhet?

5.3.7 Använd metoden i avsnitt 5.3.3 för att hitta det största värdet av funktionen

a. $|\sin 3x + \sqrt{3}\cos 3x|$ b. $|\sqrt{12}\sin 3x - 2\cos 3x|$.

5.3.8 Visa att funktionerna nedan är definierade för alla $x \in \mathbb{R}$.

a. $\ln(x^2 - x + 1)$ b. $\dfrac{1}{x^2 + 2x + 2}$.

6 GRÄNSVÄRDEN OCH KONTINUITET

6.1 GRÄNSVÄRDESBEGREPPET

Den moderna synen på gränsvärde kom till under 1800-talet genom framförallt matematikerna Bolzano, Cauchy och Weierstrass. Men långt innan dess hade de grekiska matematikerna arbetat med gränsvärdesberäkningar i samband med geometrin. Mest känd är väl Archimedes som på 200-talet före vår tid visade hur man kan beräkna cirkelns längd och area som ett gränsvärde av regelbundna polygoners längder och areor. Detta nämndes i kapitel 3. Med samma teknik beräknade Archimedes volym av olika kroppar.

Vi ska nu titta lite närmre på hur man kan beräkna $\sqrt{2}$. Metoden vi ska använda är en upprepad geometrisk konstruktion som leder till rationella tal som ligger allt närmare $\sqrt{2}$.

Geometriskt är $\sqrt{2}$ förhållandet mellan diagonalen, d, och sidan, s, i en kvadrat. Betrakta nu istället en större kvadrat med sidan $S = s + d$. Genom att använda Pythagoras sats kan diagonalen i denna kvadrat beräknas till $D = d + 2s$.

Vi ska nu approximera $\sqrt{2}$ genom att välja två *heltal* s_0 och d_0 och uppdatera dessa genom att sätta $s_1 = d_0 + s_0$ och $d_1 = d_0 + 2s_0$. Observera att om s_0 och d_0 hade beskrivit sidan och diagonalen i en kvadrat, så hade s_1 och d_1 varit sidan och diagonalen i den större kvadraten. Eftersom s_0 och d_0 inte är sidan och diagonalen i kvadrat, så är inte s_1 och d_1 det heller, men det visar sig att d_1/s_1 är en bättre approximation av $\sqrt{2}$ än vad d_0/s_0 är. Vi noterar också att

$$d_1^2 - 2s_1^2 = (d_0 + 2s_0)^2 - 2(s_0 + d_0)^2 = -(d_0^2 - 2s_0^2).$$

Vi testar:

Utgå från talen $s_0 = d_0 = 1$. Då får vi approximationen $\sqrt{2} \approx d_0/s_0 = 1$. Lägg märke till skillnaden $d_0 - 2s_0 = 1 - 2 \cdot 1 = -1$. Nu beräknar vi s_1 och d_1

$$s_1 = 1 + 1 = 2, \quad d_1 = 1 + 2 \cdot 1 = 3, \quad \text{och } d_1^2 - 2s_1^2 = 9 - 8 = 1.$$

Andra approximationen är alltså $\sqrt{2} \approx \frac{3}{2}\,(= 1,5)$. Nästa approximation fås på samma sätt

$$s_2 = 3 + 2 = 5, \quad d_2 = 3 + 2 \cdot 2 = 7, \quad \text{och } d_2^2 - 2s_2^2 = 49 - 50 = -1.$$

Tredje approximationen är alltså $\sqrt{2} \approx \frac{7}{5}\,(= 1,4)$. Upprepa proceduren igen och vi får

$$s_3 = 7 + 5 = 12, \quad d_3 = 7 + 2 \cdot 5 = 17, \quad \text{och } d_3^2 - 2s_3^2 = 289 - 288 = 1.$$

Fjärde approximationen är $\sqrt{2} \approx \frac{17}{12}\,(\approx 1.417)$. Proceduren upprepas gång på gång, dvs. vi sätter $s_n = s_{n-1} + d_{n-1}$ och $d_n = d_{n-1} + 2s_{n-1}$. De följande bråktalen är

$$\frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \frac{577}{408}, \frac{1393}{985}, \frac{3363}{2378} \approx 1,4142136.$$

Den sista approximationen är ett korrekt värde på $\sqrt{2}$ avrundat till sju decimaler. Vi får här en oändlig följd av rationella tal d_n/s_n. Inget av talen kommer att bli exakt $\sqrt{2}$, men man kan få en approximation som är så nära som man önskar.

Notera att d_n och s_n blir allt större och större, men skillnaden $d_n^2 - 2s_n^2$ fortsätter att växla mellan 1 och -1. Därför måste bråket d_n/s_n närma sig ett värde och det går att visa att detta värde måste vara just $\sqrt{2}$.

En sådan här oändlig följd av tal kallas helt enkelt för en **talföljd**. Om man använder begreppet funktion, så kan man alternativt säga att en talföljd är en funktion från de positiva heltalen, $\mathbb{Z}_+$, till de reella talen. För talföljden som approximerar $\sqrt{2}$ får vi då

$$f : \mathbb{Z}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ f(1) = 1,\ f(2) = \frac{3}{2},\ f(3) = \frac{7}{5},\ f(4) = \frac{17}{12},\ f(5) = \frac{41}{29}, \ldots .$$

Ofta brukar man ange talföljder med index istället för med argumentet inom parenteser, vilket för denna följd blir

$$f_1 = 1,\ f_2 = \frac{3}{2},\ f_3 = \frac{7}{5},\ f_4 = \frac{17}{12},\ f_5 = \frac{41}{29}, \ldots .$$

Exempel. Vi definierar en talföljd genom

$$f(n) = \frac{n+1}{n}, \quad \text{för alla positiva heltal } n.$$

De första talen i följden blir

$$f(1) = \frac{2}{1} = 2,\ f(2) = \frac{3}{2} = 1{,}5,\ f(3) = \frac{4}{3} \approx 1{,}333,\ f(4) = \frac{5}{4} = 1{,}25, \ldots .$$

Kanske misstänker du direkt att följden närmar sig 1 alltmer, och omskrivningen

$$\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

är troligen ännu mer övertygande. Inget av talen kommer någonsin att bli exakt 1, men skillnaden (som ju är $1/n$) kommer att bli mindre och mindre. $\square$

Vi har här givit två exempel på talföljder som båda närmar sig ett visst värde. Detta är den intuitiva bilden av att en talföljd har ett **gränsvärde**. Vi ska här inte ge den formella definitionen av vad det betyder att en talföljd har ett gränsvärde utan nöjer oss med denna intuitiva mening att den alltmer närmar sig ett tal. Vi inför också den praktiska beteckningen

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = A,$$

som betyder att talföljden $f(n)$ har A som gränsvärde (när $n \longrightarrow \infty$). För följden i exemplet blir det

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Långt ifrån alla talföljder har ett gränsvärde. Om vi t.ex. tar $f(n) = n$ så växer denna mer och mer och närmar sig inte något tal, så talföljden saknar gränsvärde. Ett annat exempel är

$$f(n) = (-1)^n,$$

som hela tiden växlar mellan att vara -1 och 1. Denna närmar sig inte heller något tal och saknar därmed gränsvärde.

Det är inte någon väsentlig skillnad på gränsvärde för en reell funktion $f(x)$ då x går mot oändligheten och gränsvärde för en talföljd. Vi tittar på två exempel på detta.

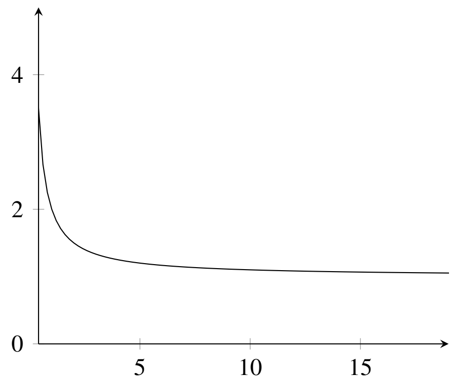
Exempel. Vi definierar en funktion f genom

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x+1}{x}.$$

Detta är samma regel som för talföljden ovan, och även nu får vi att funktionen närmar sig 1 när x går mot oändligheten så vi har

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x} = 1.$$

Början av grafen för funktionen finns i figur 9. □



Figur 9: Början av grafen för $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$.

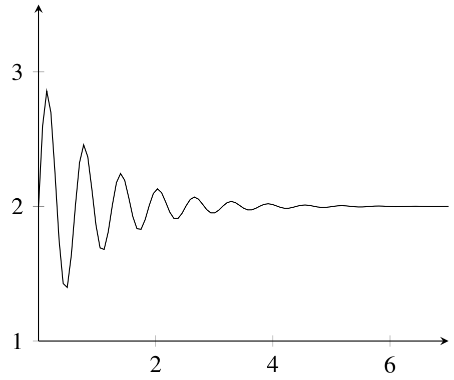
Exempel. Vi definierar en funktion f genom

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = 2 + \sin(10x)e^{-x}.$$

Vi vet att $\sin(10x)$ kommer att svänga mellan -1 och 1, medan e^{-x} kommer att vara positiv men bli mindre och mindre när x växer. Det betyder att produkten av de två termerna kommer att närma sig 0 när x går mot oändligheten och

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \left(2 + \sin(10x)e^{-x}\right) = 2.$$

Början av grafen för funktionen finns i figur 10, där man kan se att svängningarna successivt blir svagare och svagare. □

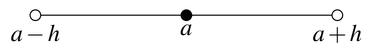


Figur 10: Början av grafen för $f(x) = 2 + \sin(10x)e^{-x}$.

Aningen mer komplicerat blir det då man talar om ett gränsvärde för en reell funktion $f(x)$ då x går mot a där a är ett reellt tal. Man tittar då på funktionens värde i en liten omgivning kring punkten a. Med en **omgivning** kring a menar man ett symmetriskt intervall kring a, dvs. en omgivning kring a är en mängd av formen

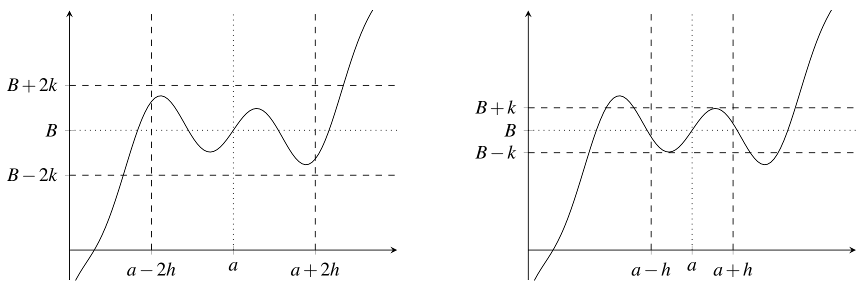
$$\{x : |x - a| < h\}.$$

Detta illustreras i figur 11. Här betyder en fylld cirkel att punkten är med i mängden och en ofylld cirkel att punkten ej är med.



Figur 11: En omgivning till a.

Den intuitiva bilden av att en funktion $f(x)$ har gränsvärdet B då x går mot a är att alla värden $f(x)$ är hur nära B som helst om man bara väljer $x \neq a$ inom en tillräckligt liten omgivning kring a. Observera att vi väljer x skilt från a, så att ett eventuellt funktionsvärde i punkten a inte inverkar på gränsvärdet. I figur 12 illustreras att $f(x)$ håller sig inom avståndet k ifrån B om x håller sig inom en omgivning. Man kan också se att om man väljer en mindre omgivning så kan vi minska k, så att funktionens värde håller sig ännu närmare B.



Figur 12: Funktionen $f(x)$ håller sig nära B när x ligger i en omgivning till a. Ju mindre omgivning man tar, ju närmare B håller funktionen sig.

Exempel. Funktionen $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ som ges av regeln

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 2}{x - 1}$$

är inte definierad för $x = 1$. För alla $x \neq 1$ kan vi dock förkorta med $x - 1$ eftersom 1 är ett nollställe till täljaren. Vi får

$$f(x) = \frac{(x-1)(x^2 - 2x + 2)}{x - 1} = x^2 - 2x + 2, \quad \text{för } \ x \neq 1.$$

Denna likhet gäller alltså i varje omgivning kring 1. Om x är mycket nära 1 så kommer $x^2 - 2x + 2$ att vara mycket nära $1^2 - 2 \cdot 1 + 2 = 1$ och

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} x^2 - 2x + 2 = 1,$$

eftersom gränsvärdet bara tar hänsyn till punkter i en omgivning kring 1. □

Precis som i fallet med gränsvärde i oändligheten är det inte säkert att gränsvärdet i en punkt existerar. Vi tittar på två exempel som illustrerar två olika skäl till att gränsvärde saknas.

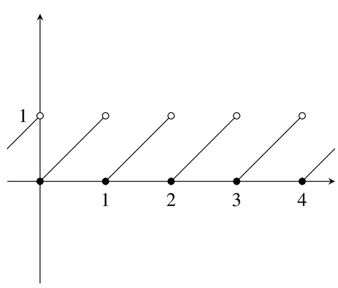
Exempel. Funktionen $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ som ges av regeln

$$f(x) = \frac{x + 1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$$

är inte definierad för $x = 0$. Om man närmar sig $x = 0$ från den positiva sidan, så går funktionsvärdet mot oändligheten (se figur 9) och därmed kan inte något gränsvärde då $x \to 0$ existera.

Om man närmar sig från den negativa sidan så går funktionsvärdet mot minus oändligheten, eftersom $1/x$ då är negativt och mycket stort. Linjen $x = 0$ blir därmed en **vertikal asymptot**, se avsnitt 6.3. □

Exempel. Vi definierar $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1)$ som ges av regeln att $f(x)$ är decimaldelen av x. T.ex. är $f(6,34) = 0,34$ och $f(\pi) = 0,1415297\ldots$. Delar av grafen till f finns i figur 13. Om man tar en omgivning kring en heltalspunkt, t.ex. $x = 1$, så kommer man att ha värden som ligger nära 1 om man är till vänster om punkten och värden som är nära 0 om man är till höger om punkten. Det går inte att hitta någon omgivning kring en heltalspunkt som inte innehåller både värden nära 1 och 0 och därför saknas gränsvärde i heltalspunkterna. □



Figur 13: Del av grafen till funktionen som tar decimaldelen av argumentet.

I stället för att skriva

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

skriver man ibland $f(x) \to A$ då $x \to a$.

Vi kommer också att skriva t.ex. $f(x) \to \infty$ då $x \to a$ om $x > a$ (eller $x < a$), för att säga att funktionens värde växer obegränsat när man närmar sig a från höger (eller vänster). Observera att detta inte betyder att funktionen har ett gränsvärde då $x \to a$. Ett gränsvärde är alltid ett tal och kan inte vara oändligheten.

Följande enkla räkneregler för gränsvärden är nyttiga att förstå och kunna tillämpa.

Antag att $f(x) \to A$ och $g(x) \to B$ då $x \to a$ och att k är ett reellt tal. Då gäller:

- $k \cdot f(x) \to k \cdot A$ då $x \to a$
- $f(x) + g(x) \to A + B$ då $x \to a$
- $f(x) \cdot g(x) \to A \cdot B$ då $x \to a$
- Om $B \neq 0$ så gäller också $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \dfrac{A}{B}$ då $x \to a$
- Om $f(x) \leq g(x)$ så är $A \leq B$

Övningar

6.1.1 Beräkna följande gränsvärden.

a. $\lim_{x\to 2} \dfrac{1}{x-1}$ b. $\lim_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1}$ c. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{1}{x-1}$

d. $\lim_{x\to 0} (3 + e^x \cos x)$ e. $\lim_{x\to \infty} (3 + e^x \cos x)$ f. $\lim_{x\to \infty} \left(3 + e^{-x} \cos x\right)$

g. $\lim_{x\to \infty} \tan x$ h. $\lim_{x\to \infty} \arctan x$ i. $\lim_{x\to -\infty} \arctan x$

6.1.2 Låt $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ vara funktionen definerad genom att $f(x)$ är det största heltal som är mindre än eller lika med x. Så t.ex. är $f(\pi) = 3$ och $f(-4{,}76) = -5$. Motivera att

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

inte existerar om a är ett heltal. Motivera också att det existerar i alla andra fall, dvs. då a inte är ett heltal.

6.2 Gränsvärden för rationella funktioner

I det här avsnittet ska vi med hjälp av några exempel se hur man kan beräkna gränsvärden för rationella funktioner.

6.2.1 Gränsvärden för rationella funktioner, då $x \to x_0$

Exempel. Bestäm gränsvärdet av $f(x) = (3x^2 - 5x - 2)/(x^2 - 4)$, då $x \to 2$.

Då $x \to 2$, går uttrycket formellt mot

$$\frac{12 - 10 - 2}{4 - 4} = \frac{0}{0},$$

som är ett så kallat **obestämt uttryck**, $\frac{0}{0}$ är ju inget tal. Men $f(x)$ är en rationell funktion, en kvot mellan två polynom $T(x) = 3x^2 - 5x - 2$ och $N(x) = x^2 - 4$. Båda dessa polynom har $x = 2$ som nollställe. Enligt faktorsatsen (se kapitel 2) är då $(x - 2)$ en faktor både i $T(x)$ och i $N(x)$. Vi får

$$T(x) = (x - 2)(3x + 1) \text{ och } N(x) = (x - 2)(x + 2).$$

För $x \neq 2$ är alltså

$$f(x) = \frac{T(x)}{N(x)} = \frac{(x - 2)(3x + 1)}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{3x + 1}{x + 2},$$

som går mot $7/4$ då $x \to 2$. Vi har alltså

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \frac{7}{4}$$

eller $f(x) \to 7/4$, då $x \to 2$. □

6.2.2 Gränsvärden för rationella funktioner, då $x \to \infty$ eller $x \to -\infty$

Vi har att $1/x$ går mot noll, då $x \to \infty$ eller $x \to -\infty$. Detta är en viktig observation då man skall beräkna gränsvärden då $x \to \infty$ eller $x \to -\infty$.

Exempel. Bestäm gränsvärdet av

$$f(x) = \frac{(2x^2 - x + 1)(2x^3 + 4x^2 - x + 2)}{3x^5 + 4x^4 - 5x + 1}, \text{ då } x \to \infty.$$

Formellt går $f(x)$ mot $\frac{\infty}{\infty}$ då $x \to \infty$. Detta är också ett obestämt uttryck. Uttrycket för $f(x)$ kan dock omformas så att man kan dra en slutsats om eventuellt gränsvärde. Bryt först ut högstagradspotensen i både täljare och nämnare. Eftersom täljaren är en produkt bryter man ut högstagradspotensen ur varje faktor. Vi får

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2(2 - 1/x + 1/x^2) \cdot x^3(2 + 4/x - 1/x^2 + 2/x^3)}{x^5(3 + 4/x - 5/x^4 + 1/x^5)} = [\text{förkorta med } x^5] = \\ &= \frac{(2 - 1/x + 1/x^2)(2 + 4/x - 1/x^2 + 2/x^3)}{3 + 4/x - 5/x^4 + 1/x^5} \\ &\to \frac{(2 + 0 + 0)(2 + 0 + 0 + 0)}{3 + 0 + 0 + 0} = \frac{4}{3}, \text{ då } x \to \infty. \end{aligned}$$

Alltså har vi att

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{4}{3}$$

eller $f(x) \to 4/3$, då $x \to \infty$. $\square$

Anmärkning. Vi får i exemplet också att $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 4/3$.

Metoden att bryta ut den högsta potensen i både täljare och nämnare fungerar alltid när man ska beräkna gränsvärden av rationella uttryck då $x \to \infty$ eller $x \to -\infty$. Om högsta potensen i nämnaren är större än den i täljaren så blir gränsvärdet 0, medan om högsta potensen i täljaren är större än den i nämnaren så saknas gränsvärde. I fallet, som i exemplet, med samma högsta potens så blir gränsvärdet kvoten mellan koefficienterna för den högsta potensen.

Övningar

6.2.1 Bestäm gränsvärdet av

a. $(2x-6)/(x^2-9)$, då $x \to 3$
b. $(x^2+x-2)/(3x^2-x-2)$, då $x \to 1$
c. $(2x^2+3x+1)/(4x^2+3x-1)$, då $x \to -1$
d. $(5x^2-9x-2)/(x^3-x^2-x-2)$, då $x \to 2$
e. $(x^4+3x^3-3x^2-8x+3)/(x^3+4x^2+4x+3)$, då $x \to -3$.

6.2.2 Bestäm gränsvärdet, då $x \to \infty$ respektive $x \to -\infty$, av

a. $(2x+1)/(3x-1)$
b. $(3x^2+2x-4)/(2-x-x^2)$
c. $(x^2+7)/(5x^3+4x+1)$
d. $(2x-1)(x^2-3)/(x-7x^3+1)$
e. $(3x^2+1)(1-5x)(x^2-x+6)/(4x^5+x^3-1)$.
f. $(3x^3+1)(1-5x)(x^2-x+6)/(4x^5+x^3-1)$.

6.3 Något om asymptoter för rationella funktioner

För att bättre förstå en kurva kan det ibland vara användbart att hitta räta linjer som kurvan närmar sig, så kallade **asymptoter**.

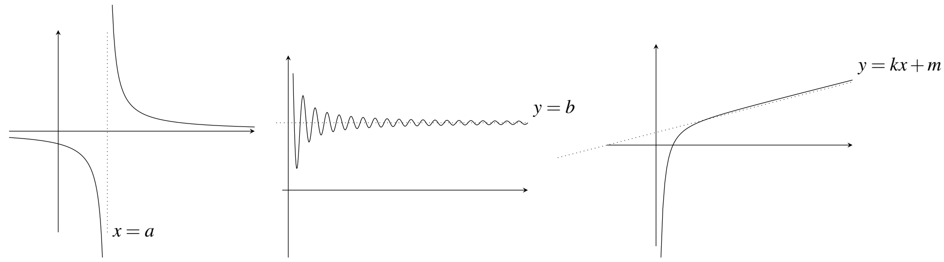
En rät linje, till vilken en rörlig punkt på en given kurva obegränsat närmar sig, då punkten allt mer avlägsnar sig från origo, kallas **asymptot till kurvan**.

Man kan dela in asymptoterna till $y = f(x)$ i tre olika typer:

1° **vertikala (lodräta) asymptoter**, som fås då $|y| \to \infty$ men $x \to x_0$ (ändligt),

2° **horisontella (vågräta) asymptoter**, då $|x| \to \infty$ men $y \to y_0$ (ändligt),

3° **sneda asymptoter**, då $|x| \to \infty$ och $|y| \to \infty$.



Figur 14: De tre olika typerna av asymptoter.

Den första typen, vertikal asymptot $x = a$, uppstår då en funktion går mot oändligheten eller minus oändligheten då $x \to a$. En horisontell asymptot, $y = b$, uppstår då en funktion har gränsvärdet b då $x \to \infty$ eller $x \to -\infty$. För den tredje typen, sned asymptot $y = kx + m$, så uppstår denna när funktionen närmar sig denna linje då $x \to \infty$ eller $x \to -\infty$. Mer exakt så är en rät linje $y = kx + m$ asymptot till kurvan $y = f(x)$ då $x \to \infty$ om och endast om

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - (kx + m)) = 0,$$

och motsvarande för $x \to -\infty$. Antag nu att den räta linjen $y = kx + m$ är asymptot till kurvan $y = f(x)$ då $x \to \infty$. Då gäller alltså att

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - kx - m) = 0.$$

Men då gäller också att

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x) - kx - m}{x} = 0,$$

eftersom uttrycket för stora x bara blir mindre om vi dividerar med x. Men det betyder att

$$0 = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x) - kx - m}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} - \lim_{x\to\infty}\frac{kx + m}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} - k,$$

så

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k.$$

Dessutom har vi att

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - kx - m) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = m.$$

Detta bevisar följande sats som är mycket användbar vid bestämning av sneda asymptoter $y = kx + m$.

En rät linje $y = kx + m$ är asymptot till kurvan $y = f(x)$ då $x \to \infty$, om och endast om båda gränsvärdena

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k \quad \text{och} \quad \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = m$$

existerar. Analogt då $x \to -\infty$.

Anmärkning. Naturligtvis finns det kurvor $y = f(x)$ som saknar asymptoter, t.ex. saknar kurvan $y = \sqrt{x}$ asymptot.

Exempel. Bestäm eventuella asymptoter till $y = f(x)$, om $f(x) = \dfrac{3x^2}{(x-1)(x+2)}$.

För bestämning av asymptoterna undersöks de olika fall man får, då y eller x går mot ∞ eller $-\infty$.

1° Vi har att

$$y = \frac{3x^2}{(x-1)(x+2)} \longrightarrow \begin{cases} \infty, \text{ då } x \to 1 \quad \text{och} \quad x > 1 \\ -\infty, \text{ då } x \to 1 \quad \text{och} \quad x < 1, \end{cases}$$

och att

$$y = \frac{3x^2}{(x-1)(x+2)} \longrightarrow \begin{cases} -\infty, \text{ då } x \to -2 \quad \text{och} \quad x > -2 \\ \infty, \text{ då } x \to -2 \quad \text{och} \quad x < -2. \end{cases}$$

Alltså är linjerna $x = 1$ och $x = -2$ två vertikala asymptoter.

2° Vidare gäller att

$$y = f(x) = \frac{3}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{2}{x}\right)} \to 3 \text{ då } x \to \pm\infty.$$

Alltså är $y = 3$ en horisontell asymptot.

3° Det finns ingen sned asymptot eftersom kurvan har horisontella asymptoter då $x \to \pm\infty$.

Vi påpekar att som vi såg så ger nämnarens nollställen i en (fullständigt förkortad) rationell funktion de vertikala asymptoterna. □

Exempel. Bestäm eventuella asymptoter till $y = f(x)$, om $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$.

Nämnaren $x+1$ ger direkt att

$$f(x) \to \begin{cases} \infty & \text{då} \quad x \to -1 \quad \text{och} \quad x > -1 \\ -\infty & \text{då} \quad x \to -1 \quad \text{och} \quad x < -1. \end{cases}$$

Alltså är $x = -1$ en lodrät asymptot. Vidare är

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x+1} = \frac{x^2(1+\frac{1}{x^2})}{x(1+\frac{1}{x})}$$

vilket visar att $f(x)$ inte har något gränsvärde då x går mot ∞ eller $-\infty$. Det finns alltså ingen horisontell asymptot.

För att finna eventuell sned asymptot undersöker vi först kvoten $f(x)/x$ då x går mot ∞ och $-\infty$.

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2+1}{x(x+1)} = \frac{x^2(1+\frac{1}{x^2})}{x^2(1+\frac{1}{x})} = \frac{1+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} \to 1,$$

då x går mot ∞ och $-\infty$. Enligt satsen ovan så gäller att om det finns en sned asymptot $y = kx+m$, så är $k = 1$. Vi undersöker nu enligt receptet i satsen $f(x) - kx = f(x) - 1 \cdot x$ för att bestämma eventuellt m.

$$f(x) - 1 \cdot x = \frac{x^2+1}{x+1} - x = \frac{(x^2+1) - x(x+1)}{x+1} = \frac{1-x}{x+1} = \frac{\frac{1}{x} - 1}{1 + \frac{1}{x}} \to -1,$$

då x går mot ∞ och $-\infty$. Vi har således funnit att linjen $y = x-1$ är en sned asymptot till $y = f(x)$ då x går mot ∞ och $-\infty$.

Ett annat sätt att bestämma asymptoter då x går mot ∞ och $-\infty$ är att utföra polynomdivision så att man får

$$f(x) = p(x) + \frac{r(x)}{n(x)}$$

där $r(x)$ har lägre grad än $n(x)$. Eftersom $r(x)$ har lägre grad än $n(x)$, så kommer kvoten mellan dem att gå mot 0 då x går mot ∞ eller $-\infty$. Det betyder att

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(p(x) + \frac{r(x)}{n(x)}\right) = \lim_{x\to\infty} p(x).$$

Om $p(x)$ är en konstant har $y = f(x)$ alltså en horisontell asymptot, och om $p(x)$ är ett förstagradspolynom $kx+m$ så har $y = f(x)$ en sned asymptot $y = kx+m$. Om $p(x)$ har grad större än 1 så har $y = f(x)$ ingen asymptot då x går mot ∞ eller $-\infty$.

I detta fall får vi

$$f(x) = x-1+\frac{2}{x+1}.$$

Precis som ovan ser vi att $y = x-1$ är en sned asymptot till $y = f(x)$. $\square$

Övningar

6.3.1 Bestäm eventuella asymptoter till $y = f(x)$, om $f(x)$ är

a. $1/(x-2)$
b. $x/(x+2)$
c. $1/(x^2-4)$
d. $(x+1)/((x-2)(x+3))$
e. $(x^2+2x+1)/(x^2+x-2)$
f. $(2x^2-4)/(x^2+1)$
g. $(x^2-3)/(x+2)$
h. $(2x^2+x)/(8-4x)$

6.3.2 Antag att

$$f(x) = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0}{x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0}$$

med $a_m \neq 0$, dvs. att $f(x)$ är en rationell funktion. Visa att kurvan $y = f(x)$

a. har en vågrät asymptot: $y = 0$, om $m < n$,
b. har en vågrät asymptot: $y = a_n$, om $m = n$,
c. har en sned asymptot: $y = a_{n+1}x + a_n - a_{n+1}b_{n-1}$, om $m = n+1$,
d. saknar såväl vågrät som sned asymptot om $m > n+1$. (Kurvan kan ha lodrät asymptot).

6.4 Kontinuitet

Ofta beskrivs kontinuitet med: ”Man kan rita grafen till $y = f(x)$ utan att lyfta pennan.” Ett bra sätt att tänka, men inte tillräckligt. Det fungerar på funktioner som $\sin x$, $3x^2 + 5x - 7$.

Men vi vill också kunna säga att funktioner som $f(x) = \frac{1}{x}$ och $g(x) = \tan x$ är kontinuerliga. Då passar inte den enkla formuleringen längre. Deras grafer kan inte ritas utan att man lyfter pennan. Vi börjar med att definiera vad det betyder att en funktion är kontinuerlig i en punkt.

Antag att funktionen f är definierad i ett intervall $(a-h, a+h)$. Vi säger att f är **kontinuerlig i punkten** a om

$$\lim_{x\to a} f(x) \text{ existerar och } \lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Det är med andra ord tre krav som skall vara uppfyllda för att funktionen f skall vara kontinuerlig i punkten a.

- Funktionen f ska vara definierad i punkten a och i ett intervall med a som mittpunkt.
- Uttrycket $f(x)$ skall ha ett gränsvärde då x går mot a.
- Detta gränsvärde ska vara just $f(a)$.

Anmärkning. Det första kravet kan synas onödigt skarpt. Man kan ju tycka att t.ex. $f(x) = \sqrt{x}$ är kontinuerlig i punkten 0 trots att den inte är definierad i ett intervall kring 0. Det går att utvidga begreppet kontinuitet genom att bara betrakta de punkter som både ligger i ett intervall kring a och i definitionsmängden till funktionen. I vårt exempel med $\sqrt{x}$, så skulle detta betyda att vi bara intresserar oss för gränsvärdet då vi närmar oss 0 från höger, eftersom funktionen inte är definierad till vänster om 0. Detta behandlas inte i detalj här, men tas upp i inledande högskole- och universitetskurser.

Om funktionen är definierad i ett intervall $(a-h, a+h)$, men något av de två andra kraven inte är uppfyllt så säger man att funktionen är **diskontinuerlig** i punkten.

Vi ska nu utifrån definitionen av kontinuitet i en punkt ge definitionen av att en funktion är **kontinuerlig**.

Vi säger att f är en **kontinuerlig funktion** om f är kontinuerlig i varje punkt i sin definitionsmängd.

Alla de elementära funktioner som behandlades i kapitel 4 är kontinuerliga (i vissa fall krävs det att vi utvidgar definitionen av kontinuitet på det sätt som diskuteras i anmärkningen ovan). För en del funktioner följer detta direkt av räkneregler för gränsvärden, i andra fall är det mer komplicerat att bevisa. Dessa bevis hör också hemma i en inledande högskole- eller universitetskurs.

Den tredje och sista definitionen om kontinuitet handlar om kontinuitet på ett intervall.

Vi säger att f är **kontinuerlig på intervallet** I om I är en delmängd av f:s definitionsmängd och f är kontinuerlig i varje punkt $a \in I$.

Exempel. Funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ är kontinuerlig i varje punkt i definitionsmängden och alltså en kontinuerlig funktion. Den är däremot inte kontinuerlig på intervallet $(-\infty, \infty)$

eftersom den inte är definierad i punkten 0. Det är inte heller möjligt att utvidga f till en funktion som är kontinuerlig på $(-\infty, \infty)$, eftersom funktionen saknar gränsvärde då $x \to 0$. Oavsett vilket värde som tilldelas $f(0)$ är den utvidgade funktionen **diskontinuerlig i punkten** 0. $\square$

Exempel. Funktionen

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 2}{x - 1}$$

är en kontinuerlig funktion, men den är inte kontinuerlig på intervallet $(-\infty, \infty)$ eftersom den inte är definierad i punkten 1. Vi såg dock i avsnitt 6.1 att

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} x^2 - 2x + 2 = 1.$$

Eftersom $f(x)$ har ett gränsvärde då $x \to 1$ är det möjligt att utvidga f till en funktion som är kontinuerlig på $(-\infty, \infty)$. Funktionen

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 2}{x - 1} & \text{om} \quad x \neq 1 \\ 1 & \text{om} \quad x = 1 \end{cases}$$

är kontinuerlig på $(-\infty, \infty)$ dvs. på hela $\mathbb{R}$. $\square$

Antag att f är kontinuerlig på det slutna och begränsade intervallet $[a, b]$. Då gäller att

- f har ett största värde och ett minsta värde på $[a, b]$.
- f antar alla värden mellan det största och det minsta värdet.
- bilden av $[a, b]$ är ett slutet begränsat intervall.

Dessa egenskaper är konsekvenser av både kontinuitetsbegreppet och egenskaper hos de reella talen. Den första återkommer vi till i nästa kapitel då vi bestämmer största och minsta värde för en funktion. Den andra egenskapen utnyttjas bland annat då man löser ekvationer med numeriska metoder. Den tredje egenskapen är egentligen bara en omskrivning av de två första. Vi avslutar med ett exempel på en tillämpning av den andra egenskapen.

Exempel. Visa att ekvationen $f(x) = x^4 - 2x^3 - 20x^2 + 6x + 35 = 0$ har fyra reella rötter.

Vi ska bestämma fyra intervall av typen $[n, n+1]$ där n är ett heltal, som innehåller exakt en rot. För att göra detta använder vi den andra egenskapen när $f(n)$ och $f(n+1)$ har olika tecken för att dra slutsatsen att $f(x) = 0$ för något $x \in [n, n+1]$.

Vi beräknar ett "lagom stort" antal funktionsvärden $f(n)$ där n är ett heltal och erhåller:

$$\begin{array}{rrr} f(-5) = 380 & f(-4) = 75 & f(-3) = -28 \\ f(-2) = -25 & f(-1) = 12 & f(0) = 35 \\ f(1) = 20 & f(2) = -33 & f(3) = -100 \\ f(4) = -133 & f(5) = -60 & f(6) = 215 \end{array}$$

Eftersom $f(-4) = 75 > 0 > -28 = f(-3)$ så finns x_1 i intervallet $[-4,-3]$ så att $f(x_1) = 0$. Ekvationen $x^4 - 2x^3 - 20x^2 + 6x + 35 = 0$ har alltså en rot x_1 i intervallet $[-4,-3]$ På samma sätt ser vi att det finns en rot x_2 i intervallet $[-2,-1]$, x_3 i intervallet $[1,2]$ och x_4 i intervallet $[5,6]$. Alltså har ekvationen minst 4 reella rötter, och då den består av ett fjärdegradspolynom så har den också högst 4 reella rötter. $\square$

Övningar

6.4.1 Bestäm intervall $[n, n+1]$, där n är ett heltal, för de tre reella rötterna till $x^3 - 3x - 1 = 0$.

6.4.2 Bestäm intervall av längden $\frac{\pi}{4}$ till den positiva roten till ekvationen $2\sin x = x$.

6.4.3 Bestäm, om möjligt, värden på konstanten c så att funktionen f är kontinuerlig då

a. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-2x^2+4x-3}{x-1} & \text{om } x \neq 1 \\ c & \text{om } x = 1 \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{om } x \neq 0 \\ c & \text{om } x = 0 \end{cases}$

6.4.4 Avgör om funktionen f är kontinuerlig då

a. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } x > 0 \\ 0 & \text{om } x < 0 \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } x \geq 0 \\ 0 & \text{om } x < 0 \end{cases}$

c. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{om } x \geq 0 \\ 0 & \text{om } x < 0 \end{cases}$

7 DERIVATA OCH INTEGRALER

Det som ger matematiken dess styrka är, i viss mån, dess talang som oöverträffat hjälpmedel vid prognoser om framtiden. En stor del av denna förmåga vilar på det som kallas integral- och differentialkalkyl, dvs. räkning med integraler och derivator.

Det ska genast påpekas att detta inte bara beror på möjligheten att göra direkta uträkningar utan också, och kanske ändå mer, på den begreppsbildning som vuxit fram som frukten av matematikers vedermödor genom århundraden. Både integration och derivering använder på ett avgörande sätt gränsvärdesbegreppet, och det var först när detta tog sin slutgiltiga form i början av 1800-talet som metoderna fick en solid teoretisk grund. En sådan grund är helt avgörande för en vetenskap som anser sig vara exakt.

Detta kapitel handlar just om hur gränsvärdesbegreppet används för att ge innebörd åt två andra begrepp: derivator och integraler. Du kommer också att få se hur elegant man ibland lyckas räkna med dem och hur man kan tolka dem i olika sammanhang. Och allt detta med bara ett förvånansvärt litet antal regler och grundläggande funktioner i verktygslådan! Det du inte kommer att få se är vilka knep man kan ta till när man inte längre lyckas räkna "exakt", vilket, om sanningen ska fram, är det normala när man försöker tillämpa matematik i vardagen. Nu gör inte detta så mycket för – som sagt – redan begreppsbildningen är av avgörande intresse.

7.1 DERIVATANS DEFINITION

Det matematiska begreppet derivata har sin motsvarighet i ett mer alldagligt och något oprecist begrepp som kan kallas momentan förändringstakt. Det används i flera sammanhang som inte direkt har med matematik att göra, t.ex. när man talar om marginaleffekter.

I ett företag kan man tala om marginalkostnader, i sammanhang som rör statens beskattning av medborgare kan man tala om marginaleffekter som kan uppstå om viss lagstiftning genomförs. Vissa, men långt ifrån alla, som använder sådana begrepp är förstås medvetna om att det finns en precis matematisk formulering i bakgrunden. De som vet det, inser att det är samma sak som dyker upp i olika sammanhang.

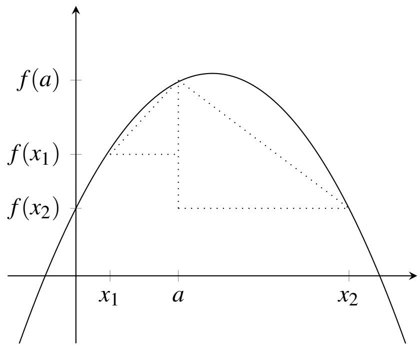
Exempel. Ett företag har vid ett visst tillfälle ett överskott av produktionsmedel (arbetskraft och maskiner). En beställning inkommer som gör att företaget ökar sin produktion. Kostnaden per ytterligare producerad enhet som krävs för att tillgodose efterfrågan blir liten eftersom företaget inte behöver investera i ny arbetskraft eller nya maskiner: marginalkostnaden för att producera en enhet mer är vid det tillfället låg.

Vid ett annat läge utnyttjar företaget sina produktionsmedel fullt ut. I det läget leder en ökad efterfrågan till att företaget måste nyanställa, investera i nya maskiner eller börja använda gamla som är ineffektiva och inte längre används: marginalkostnaden för att producera en enhet mer är vid detta tillfälle hög. □

Exempel. En hungrig student har slagit på stort och köpt en stek för att smörja kråset en helg. Steken sätts in i ugnen med en välplacerad stektermometer. Aromen får det att vattnas i munnen. Under de första tio minuterna stiger temperaturen raskt och studenten, som hoppas på snar förtäring, löser ett sudoku för att skingra tankarna. När det är klart avläses termometern igen. Men nu visar sig temperaturen stiga i en besvärande långsam takt. □

I båda exemplen finns det en funktion f i bakgrunden. I det första är $f(x)$ företagets kostnader (mätt i kronor t.ex.) för att producera x enheter. I det andra fallet är $f(x)$ temperaturen som stektermometern visar vid tidpunkten x.

Båda handlar dessutom om att värdet på funktionen f förändras i olika takt vid olika värden på variabeln x.



Figur 15: Olika differenskvoter när $x = x_1$ respektive $x = x_2$.

För att mäta i vilken takt funktionens värden förändras i närheten av ett specifikt värde $x = a$ på variabeln ska vi ta reda på förändringen i funktionens värden i förhållande till förändringen i variabeln. Låt oss välja ett värde på variabeln x i närheten av a ($x \neq a$). Ett mått på förändringstakten i a ges då av den så kallade **differenskvoten**

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

dvs. förändringen i funktionsvärden mellan x och a i förhållande till förändringen mellan x och a, variabelns förändring. Det är i detta sammanhang brukligt att man inför beteckningen Δf som förkortat skrivsätt för förändringen i funktionsvärde $f(x) - f(a)$ och Δx för förändringen i variabelns värde $x - a$, så att differenskvoten kan skrivas

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \qquad \Big(= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \Big),$$

men detta beteckningssätt gör talet a osynligt, trots att det i själva verket är viktigt.

Vid närmare eftertanke står det klart att detta inte fungerar som mått på funktionens förändringstakt i a. För det första sägs ju inget om hur nära x ska ligga a, för det andra beror ju differenskvoten inte bara på a utan också på vad x är: olika x i närheten av a kan ge olika differenskvoter.

Det som återstår att göra för att få något som bara beror på a är att låta x närma sig a, dvs. ta gränsvärdet av differenskvoten ovan när x går mot a.

Nu uppstår emellertid ett nytt problem: om man i differenskvoten ersätter x med a, får man ett uttryck av typen “0/0”. Sådana uttryck kan vara vad som helst; ibland kan man ge dem mening, men långt i från alltid. Det precisa sättet att säga detta är att man inte kan vara säker på att differenskvoten har något gränsvärde när x går mot a. Följande definition är därför på sin plats:

Vi utgår från att funktionen f är definierad för alla värden på variabeln x i närheten av talet a. Funktionen sägs då vara **deriverbar** i a om differenskvoten

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

har ett gränsvärde när x går mot a. Detta gränsvärde betecknas i så fall med $f'(a)$ och kallas funktionens **derivata** i a. Man har alltså i detta fall

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Inspirerat av beteckningssättet $\Delta f/\Delta x$ för differenskvoten används också beteckningen

$$\frac{df}{dx}(a)$$

för $f'(a)$. Här ska man lägga märke till att df/dx inte är en kvot mellan två tal, utan en sammanhållen beteckning för f'.

Exempel. Antag att funktionen f är linjär, dvs. $f(x)=kx+m$, där k och m är några givna konstanter. Låt a vara ett fixt tal. Differenskvoten blir då

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad = \quad \frac{kx+m-(ka+m)}{x-a}=\frac{k(x-a)}{x-a}=k.$$

Vi ser att differenskvoten är en konstant; den beror inte alls på x. När x går mot a, blir förstås gränsvärdet av denna kvot också k. Vi har kommit fram till att f är deriverbar i a, för gränsvärdet finns, och att detta gränsvärde är k. Alltså har vi i detta exempel att $f'(a)=k$.

Det betyder att funktionen alltid har samma momentana förändringstakt, för $f'(a)$ har samma värde oavsett vad a är. Om vi tänker på att grafen till en linjär funktion är en rät linje, är detta något som inte bör överraska. **Linjära funktioner** karakteriseras just av att de har samma konstanta derivata i alla tal a i definitionsmängden.

Lägg märke till att grafen till f är en rät linje med riktningskoefficient k. □

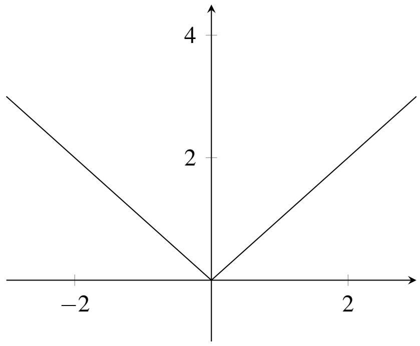
Exemplet visar att om funktionen f själv är konstant, dvs. har samma värde, låt oss kalla det m, för alla x, så att $f(x)=m$, så har f derivatan 0 i alla tal: $f'(a)=0$ för alla tal a. Detta brukar något slarvigt sägas “derivatan av en konstant är noll”.

Här är ett exempel på att differenskvoten inte alltid har ett gränsvärde.

Exempel. Vi tittar på funktionen $f(x)=|x|$ och vill undersöka differenskvoten i $a=0$. Den blir

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad = \quad \frac{|x|-0}{x-0}=\frac{|x|}{x}=\begin{cases} -1 & \text{när } x<0 \\ 1 & \text{när } x>0. \end{cases}$$

Den har därför inget gränsvärde när x går mot 0. (När x närmar sig 0 uppifrån är kvoten 1, när x närmar sig 0 nerifrån är den -1. Men när man tar ett gränsvärde ska x närma sig 0 från båda hållen och det ger inget resultat i detta fall.)



Figur 16: Grafen till $f(x) = |x|$.

Om vi tittar på grafen till $f(x) = |x|$ blir vi knappast förvånade över detta. I tal a som ligger till vänster om 0 på tallinjen har f konstant derivata -1, i tal a som ligger till höger om 0 har f konstant derivata 1. □

Exempel. Vi låter nu $f(x) = x^2$ och undersöker om f har en derivata i ett tal a och vad derivatan i så fall kan vara.

Differenskvoten blir nu

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{x^2-a^2}{x-a} = \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = x+a,$$

med hjälp av konjugatregeln. Här ser vi att kvoten faktiskt beror på x, men vi förstår också att gränsvärdet av den då x går mot a blir $a+a=2a$. Vi har kommit fram till att f är deriverbar i varje tal a och att $f'(a) = 2a$. T.ex. har vi när $a = 10$ att $f'(10) = 20$, men när $a = -3$ har vi att $f'(-3) = -6$. Funktionen har olika momentan förändringstakt i olika tal i definitionsmängden. □

Varning! Det är viktigt att ha koll på prioritetsordningen mellan $'$ och a i beteckningen $f'(a)$. Man kan frestas att tro att man först kan sätta in värdet a i funktionen och sedan derivera. Gör man det får man 0 både som svar och som poäng på ett prov! Talet $f(a)$ är ju en konstant och deriverar man en konstant får man 0. Man ska först derivera funktionen och sedan sätta in ett specifikt värde på a.

Det är inte ovanligt att man skriver det x vi använt ovan som $a+h$ där h är ett tal nära 0. Vi vill ju att x ska vara nära a så då kan vi lika gärna sätta $x = a+h$, där h ligger nära 0, dvs. har ett litet absolutbelopp. Differenskvoten i a blir då

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{1}{h}(f(a+h)-f(a)),$$

där vi nu i högerledet ska låta h närma sig 0, för att få x att närma sig a.

Sammanfattningsvis har vi att om f är deriverbar i a så ges derivatan i a av

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Eftersom derivatan kan variera i olika tal a i funktionen f:s definitionsmängd är det inte så konstigt att vi vill tänka på också derivatan som en funktion. Om vi startar med att kalla f:s variabel för x är det då mest naturligt att också kalla variabeln i derivatan för x, och inte för a som vi gjort ovan. Då lämpar sig inte den första varianten av differenskvot vi använde särskilt bra eftersom x då skulle användas i två olika betydelser. Den andra varianten duger då betydligt bättre:

$$f'(x) \quad = \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Om f betecknar den ursprungliga funktionen, så betecknas den nya funktion vi får genom att derivera i olika tal i definitionsmängden för f' eller Df eller df/dx. Den nya funktionen f' kallas då **derivatan** till f och är, till skillnad från $f'(a)$, alltså inte ett tal, utan en ny funktion.

Exempel. Bestäm $f'(x)$ när $f(x) = x^3$.

Vi ska bestämma gränsvärdet, när h går mot 0, av differenskvoten

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) &= \frac{1}{h}((x+h)^3 - x^3) = \\
&= \frac{1}{h}(x+h-x)((x+h)^2 + (x+h)x + x^2) = \\
&= (x+h)^2 + (x+h)x + x^2,
\end{aligned}$$

där vi använt den allmänna konjugatregeln $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$. Det är ingen större konst att se att gränsvärdet då blir $x^2 + x \cdot x + x^2 = 3x^2$, när h går mot 0. Vi har alltså kommit fram till att $f'(x) = 3x^2$, eller med annat beteckningssätt

$$D(x^3) = (x^3)' = 3x^2.$$

□

På liknande sätt som i exemplet strax ovan kan man visa att

$$D(x^n) = nx^{n-1} \quad \text{när} \quad n \quad \text{är ett positivt heltal}$$

Exempel. Hur gick det nu för den hungrige studenten? Newton formulerade en berömd värmelag. Den säger att den takt med vilken temperaturen hos ett föremål (steken) i en varmare omgivning ändras vid en viss tidpunkt, är proportionell mot skillnaden mellan omgivningens temperatur och föremålets för tillfället.

Om vi låter t beteckna tiden och skriver $f(t)$ för stekens temperatur och utgår från att ugnens temperatur är konstant 175° betyder det att

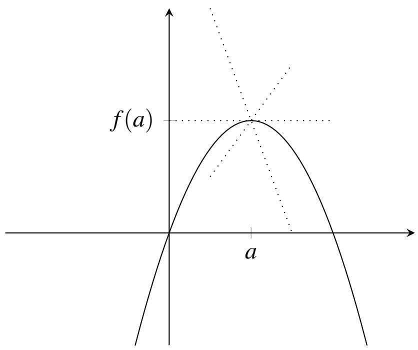
$$f'(t) = k(175 - f(t))$$

för någon konstant k. En sådan ekvation kallas en modell för situationen och begränsar starkt vad funktionen f kan vara. I detta fall är modellen vad som kallas en **differentialekvation**. Genom att lösa den kan studenten ta reda på hur lång till det tar innan $f(t)$ blir 73 och steken är redo för förtäring. □

7.2 LINEARISERING, TANGENTER OCH NORMALER

Vi har sett att derivatan $f'(a)$ av en funktion f, i den händelse den finns, mäter den momentanta förändringstakten av funktionens värde i närheten av talet a.

Vi ska nu ge en annan tolkning av derivatan, nämligen som lutning i en punkt på funktionens graf. Vi ska försöka bestämma linjen som bäst ansluter till grafen i en given punkt, tangeringspunkten, på den. En sådan linje kallas en **tangent** till grafen. Tangentens riktningskoefficient anger sedan hur mycket grafen lutar i tangeringspunkten.



Figur 17: Flera linjer som går genom $(a, f(a))$.

Vi fixerar ett värde a på variabeln x i funktionen f, och förutsätter att f är definierad i alla tal nära a. Då är $(a, f(a))$ en punkt på grafen till f. En linje genom den har då en ekvation av formen $y - f(a) = k(x - a)$.

För varje konstant k är alltså $y = k(x-a) + f(a)$ ekvation för en linje genom punkten $(a, f(a))$ på grafen. Vi kan tänka på linjen som grafen till den linjära funktionen $L(x) = k(x-a) + f(a)$. Vad ska det nu betyda att linjen ansluter bäst till grafen? Ett rimligt krav är att skillnaden mellan $f(x)$ och $L(x)$ ska vara relativt liten när x ligger nära a och helst väsentligen 0 när x är väldigt nära a. (Jämför asymptoter i avsnitt 6.3.)

Det matematiska sättet att uttrycka "relativt" är att använda en kvot. Fullföljer vi den idén får vi att vi ska titta på kvoten mellan skillnaden $f(x) - L(x)$ och $x - a$:

$$\frac{f(x) - L(x)}{x - a} = \frac{f(x) - k(x-a) - f(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - k.$$

(Vi känner igen differenskvoten från förra avsnittet som en del av högra ledet.)

För att få den linje som bäst ansluter till grafen vill vi att denna kvot ska gå mot 0 när x går mot a. Vi ska alltså välja k så att

$$0 = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - k = f'(a) - k,$$

under förutsättning att derivatan $f'(a)$ finns. Detta ger oss $0 = f'(a) - k$ och $k = f'(a)$.

Om funktionen f har derivatan f' så kallas linjen med ekvation

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

för **tangenten** till grafen i punkten $(a, f(a))$. Den har riktningskoefficient $f'(a)$. Funktionen

$$L(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$$

kallas **lineariseringen** av f kring a. Den har tangenten som graf.

Exempel. Bestäm en ekvation för tangenten till grafen till funktionen $f(x) = 1/x$ i den punkt på grafen där första koordinaten är 2.

Den punkt på grafen det är fråga om är $(2, f(2)) = (2, 1/2)$. En ekvation för tangenten ges av

$$y = f'(2)(x-2) + f(2) = f'(2)(x-2) + \frac{1}{2}.$$

Vi behöver bestämma $f'(x)$, för att kunna räkna ut $f'(2)$. Eftersom vi ännu inte skakat hand med denna derivata i texten, gör vi nu kalkylen av den.

Differenskvoten blir

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{1}{h}\Big(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\Big)\\ &= \frac{1}{h}\cdot\frac{-h}{(x+h)x}\\ &= \frac{-1}{(x+h)x},\end{aligned}$$

som har gränsvärdet $-1/x^2$ när h går mot 0. Vi har alltså bestämt att $f'(x) = -1/x^2$ så $f'(2) = -1/4$. Detta ger oss att tangenten i fråga har ekvationen

$$y = (-1/4)(x-2) + 1/2 = -x/4 + 1.$$

□

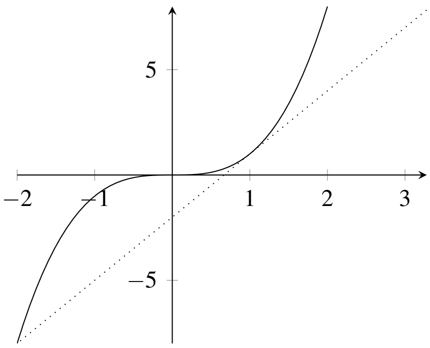
På liknande sätt som i detta exempel kan man visa att

$$D(x^{-n}) = D\Big(\frac{1}{x^n}\Big) = -\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1} \quad \text{när} \quad n \quad \text{är ett positivt heltal.}$$

Exempel. Bestäm ett närmevärde till $0,9^3$ genom att använda linearisering av en lämplig funktion kring $x = 1$.

Vi sätter $f(x) = x^3$ och har då, från förra avsnittet, att $f'(x) = 3x^2$. Detta ger att lineariseringen av f kring $x = 1$ är funktionen

$$L(x) = f'(1)(x-1) + f(1) = 3(x-1) + 1 = 3x - 2$$

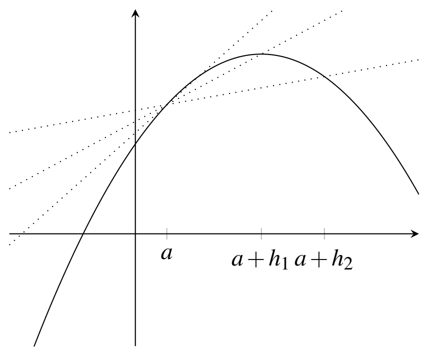


Figur 18: Grafen till x^3 och dess linjära approximation kring $x = 1$.

Talet $L(0{,}9) = 2{,}7 - 2 = 0{,}7$ ger oss som ett ungefärligt värde på $f(0{,}9) = 0{,}9^3 = 0{,}729$. Vi gör ett fel på i storleksordningen tre hundradelar.

Gör vi samma sak för att räkna ut ett närmevärde på 0.98 får vi lätt med handräkning $L(0{,}98) = 0{,}94$, men med större besvär $0{,}98^3 = 0{,}941192$. Nu är felet av storleksordning en tusendedel. $\square$

Naturligtvis är det helt avgörande när man använder linearisering av en funktion för att beräkna approximationer till dess värden, att man kan ha kontroll på hur stort fel man gör. Det är ett omfattande område i matematiken som vi inte ska gå in på här.



Figur 19: Tangent och sekanter genom $(a, f(a))$.

Ett populärt sätt att tänka på tangenten till en punkt på en graf, är att föreställa sig den som “gränslinjen” till sekanter till grafen genom tangeringspunkten.

Vi fixerar $(a, f(a))$ på grafen till f. Vi väljer ett värde $a+h$ på variabeln x, där h ligger nära 0, och får nu också punkten $(a+h, f(a+h))$ på grafen.

Linjen genom de två punkterna har en ekvation vars riktningskoefficient vi kan bestämma till

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

En sådan sekant till grafen har alltså ekvationen

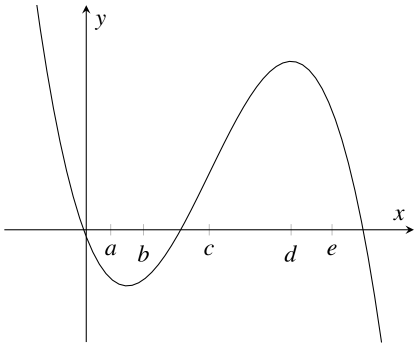
$$y = \frac{1}{h}(f(a+h) - f(a))(x - a) + f(a),$$

för vi ser att om vi sätter $x = a$ i höger led så blir $y = f(a)$, så att sekanten går genom punkten $(a, f(a))$.

Vi känner igen differenskvoten som riktningskoefficienten. När vi låter h går mot noll kommer denna linje därför att närma sig linjen med ekvation

$$y = f'(a)(x-a) + f(a),$$

som är ekvationen för tangenten till grafen i punkten $(a, f(a))$.



Figur 20: Grafen till f och fem punkter på x-axeln.

Exempel. I figur 20 ser du grafen till en funktion och fem markerade punkter på x-axeln. Man har beräknat $f'(x)$ i var och en av dessa men glömt bort vilken punkt som hör till vilket värde. Rekonstruera följande tabell:

x					
$f'(x)$	0	0,5	2	-0,5	-2

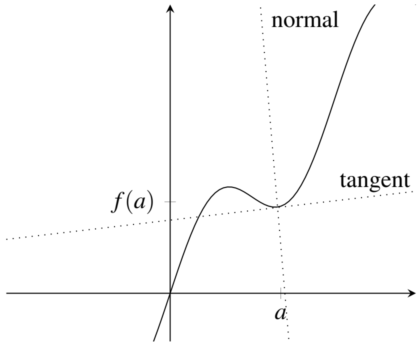
Det är bara i punkten med d som första koordinat som tangenten är parallell med x-axeln, dvs. har riktningskoefficient 0, så $f'(d) = 0$.

Vi ser att tangenten i punkterna med första koordinat a och e har negativ lutning och att den med e har minst lutning (=störst lutning nedåt). Det ger $f'(e) = -2$ och $f'(a) = -0,5$.

I punkterna med första koordinat b och c är tangentens lutning positiv. Den är störst i den med första koordinat c. Det ger $f(c) = 2$ och $f(b) = 0,5$. Tabellen var alltså

x	d	b	c	a	e
$f'(x)$	0	0,5	2	-0,5	-2

□



Figur 21: Normal och tangent genom $(a, f(a))$.

Föreställ dig nu grafen till en funktion f och tangenten till den i $(a, f(a))$. En linje som skär tangenten under rät vinkel i denna punkt kallas en **normal** till grafen i $(a, f(a))$.

Eftersom produkten av riktningskoefficienterna för två vinkelräta linjer är -1 vet vi att normalen har riktningskoefficienten $-1/f'(a)$ eftersom den är vinkelrät mot tangenten, som har riktningskoefficient $f'(a)$, under förutsättning att $f'(a) \neq 0$. Om $f'(a) = 0$ är normalen parallell med y-axeln.

En normal till grafen av f i punkten $(a, f(a))$

1. har riktningskoefficienten $-\dfrac{1}{f'(a)}$ om $f'(a) \neq 0$,
2. är parallell med y-axeln om $f'(a) = 0$.

Exempel. Bestäm ekvationer för tangenten och normalen till grafen av $1/x$ i den punkt på grafen där första koordinaten är a) 2 och b) $-1/3$

Vi har sedan tidigare att $D(1/x) = -1/x^2$.

a) Punkten på grafen det är fråga om är $(2, 1/2)$ och funktionen har derivatan $-1/2^2 = -1/4$ i 2, som också är tangentens riktningskoefficient. Normalens riktningskoefficient blir istället $2^2 = 4$. Vi får att tangenten, enligt enpunktsformeln, har ekvationen

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x-2), \quad \text{eller} \quad y = -\frac{x}{4} + 1.$$

Enligt samma formel har normalen ekvationen

$$y - \frac{1}{2} = 4(x-2), \quad \text{eller} \quad y = 4x - 15/2.$$

b) Nu är punkten på grafen i stället $(-1/3, -3)$ och tangenten har riktningskoefficient $-1/(-1/3)^2 = -9$, så normalen har riktningskoefficienten $-(1/(-9)) = 1/9$. Som tidigare får vi en ekvation för tangenten till

$$y - (-3) = -9(x - (-\frac{1}{3})) \quad \text{eller} \quad y = -9x - 6$$

och för normalen

$$y-(-3)=\frac{1}{9}(x-(-\frac{1}{3})) \quad \text{eller} \quad y=\frac{x}{9}-\frac{78}{27}.$$

$\square$

7.2.1 Betydelsen av derivatans tecken

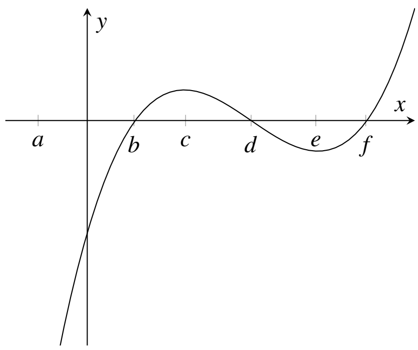
När $f'(x)$ är positiv lutar tangenten till grafen av f i punkten $(x,f(x))$ uppåt; där den är negativ lutar tangenten nedåt. Det är lätt att tro på följande:

- Om $f' \geq 0$ på ett intervall, så är f växande där.
- Om $f' \leq 0$ på ett intervall, så är f avtagande där.
- Om $f' = 0$ i alla punkter på ett intervall, så är f konstant där.

Exempel. Var är funktionen $f(x)=x^4-4x^3$ avtagande respektive växande?

Vi deriverar och får $f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$, som är negativ om $x<3$ och positiv om $x>3$.

Alltså är f avtagande på intervallet $(-\infty,3]$ och växande på intervallet $[3,\infty)$. $\square$

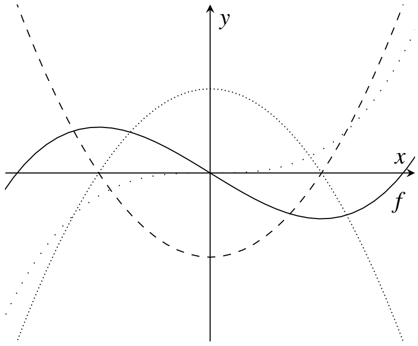


Figur 22: Grafen till g'

Exempel. En funktion g har en derivata vars graf illustreras i figur 22. På vilka av de intervall som antyds i figuren är funktionen växande respektive avtagande?

Eftersom g' är större än noll på intervallen $[b,d]$ och $[f,\infty)$ är g växande där. Eftersom g' är mindre än noll på intervallen $(-\infty,b]$ och $[d,f]$ är g avtagande där. $\square$

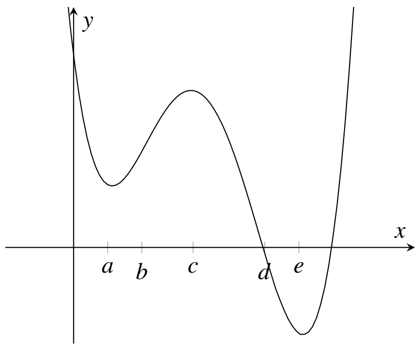
Exempel. I figur 23 syns grafen till funktionen f och tre andra grafer. En av dessa tre är grafen till f'. Vilken?



Figur 23: Grafen till f och tre andra funktioner.

Om vi tittar längst till vänster längs x-axeln i figur 23 ser vi att f är växande där, vilket medför att derivatan av f måste vara positiv där. Bara grafen som är streckad uppfyller detta villkor och alltså måste denna vara grafen till f'. □

Exempel. I figur 24 syns grafen till funktionen f och fem punkter a, b, c, d och e.



Figur 24: Grafen till f och punkter på x-axeln.

a) Var byter f' tecken?

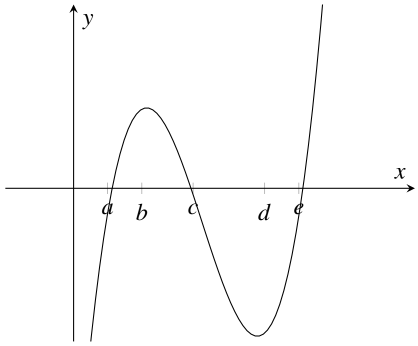
b) Gör en grov skiss över f'.

a) I punkter på grafen vars första koordinat är $< a$ är tangentens lutning negativ, i punkter vars första koordinat är mellan a och c är den positiv, i punkter vars första koordinat är mellan c och e är den negativ och slutligen positiv i punkter vars första koordinat är $> e$ är tangentens lutning positiv.

Eftersom $f'(x)$ är riktningskoefficienten för tangenten i punkten på grafen vars första koordinat är x ger detta att f' växlar tecken i a, c och e.

b) Baserat på denna information bör f' ha en graf i stil med den i figur 25

□



Figur 25: Grafen till f'.

7.3 Genvägar till derivering

Hittills har vi med handkraft, utgående från derivatans defintion som gränsvärde av en differenskvot, endast lyckats beräkna ett fåtal derivator. Detta är naturligtvis inte hållbart i längden att behöva beräkna nya gränsvärden varje gång vi ska derivera. Vi behöver en tabell över kända derivator och ett antal allmänna regler för derivering. för derivering.

- $Dx^a = ax^{a-1}$, där a är en konstant. Om $a < 1$ måste $x \neq 0$.
- $De^x = e^x$
- $D\ln x = \frac{1}{x}$
- $D\sin x = \cos x$
- $D\cos x = -\sin x$
- $D\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
- $D\cot x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$
- $D(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$
- $D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, när $x \neq \pm 1$.

Tabell 1: De grundläggande funktionernas derivator.

7.3.1 Grundläggande funktioners derivator

Genom att genomföra kalkyler enligt derivatans definition kan man med viss möda bevisa riktigheten av derivatorna i tabell 1. Dessa bör du kunna utantill. Observera att vinkeln x motsvarar en vinkel angiven i radianer i formlerna för derivator av de trigonometriska funktionerna. Är vinklen i stället angiven i grader får man andra formler. Se mer om detta i ett exempel i avsnitt 7.3.3

Exempel.

a) För exponentialfunktionen $f(x) = a^x$ får vi enligt derivatans definition

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} a^x = f'(0) \cdot f(x).$$

Det är inte så svårt att inse att $f'(0)$ växer om a växer. Det finns därmed exakt ett värde på a sådant att $f'(0) = 1$. Detta tal är det vi känner till som e (≈ 2.71828).

b) Om vi använder formeln för x^a med $a = 1/2$, får vi

$$D(\sqrt{x}) = D(x^{1/2}) = \frac{1}{2} \cdot x^{1/2-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Derivering av "rottecken" är så vanligt förekommande att du bör kunna

$$D(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

utantill.

b) Samma formel men nu med $a = -1$ ger

$$D\left(\frac{1}{x}\right) = D(x^{-1}) = (-1) \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

d) Med $a = -n$ får vi

$$D\left(\frac{1}{x^n}\right) = D(x^{-n}) = (-n)x^{-n-1} = \frac{-n}{x^{n+1}}.$$

□

7.3.2 Allmänna deriveringsregler

De grundläggande funktionerna räcker inte till för att beskriva de intrikata förlopp som dyker upp i verkligheten. I matematik används därför de grundläggande funktionerna som byggstenar för att åstadkomma mer komplicerade funktioner, som kan åstadkomma detta. Vi bygger nya funktioner genom att addera, multiplicera, göra sammansättningar och ta kvoter av gamla. I denna process är det viktigt att kunna uttrycka de nya funktionernas derivator med hjälp av de gamlas. För den sakens skull har matematiker tänkt igenom vad som händer i detta avseende. Man har kommit fram till följande

Allmänna deriveringsregler

1. $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$
2. $(f(x)-g(x))' = f'(x)-g'(x)$
3. $(cf(x))' = cf'(x)$, när c är en konstant.
4. $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)g'(x)$ (Produktregeln.)
5. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$ (Kvotregeln.)
6. $(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$ (Kedjeregeln; $g'(x)$ kallas i detta sammanhang för den inre derivatan.)

Exempel. Vi kan använda kvotregeln för att beräkna derivatan av $\tan x$ med hjälp av derivatorna av $\sin x$ och $\cos x$ eftersom

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Vi får

$$\begin{aligned} D(\tan x) &= D\Big(\frac{\sin x}{\cos x}\Big) = \frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{(\cos x)^2} = \\ &= \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Detta är en härledning av derivatan av $\tan x$. □

Exempel. Tabellen över de grundläggande funktionernas derivator och produktregeln ger

$$D(e^x\cdot\ln x) = e^x\cdot\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x} = e^x(x\ln x+1)/x.$$

□

Nästa exempel visar hur man deriverar andra exponentialfunktioner än e^x med hjälp av en enkel omskrivning. Generellt kan det vara bra att vid derivering först fundera en stund om man kan förenkla räkningarna genom att göra en omskrivning. De följande exemplen illustrerar detta.

Exempel. För att derivera 5^x görs omskrivningen $5^x = e^{x\ln 5}$. Den kan då ses som $f(g(x))$ där $f(x) = e^x$ och $g(x) = x\ln 5$. Eftersom $D(e^x) = e^x$ ger nu kedjeregeln att

$$D(5^x) = \quad = \quad D(e^{x\ln 5}) = e^{x\ln 5}D(x\ln 5) = 5^x\cdot\ln 5.$$

Funktionen x^5 har derivata $D(x^5) = 5x^4$. Förväxla inte potensfunktionen x^a med exponentialfunktionen a^x! □

Exempel. För ett exempel på en rationell funktion får vi

$$\begin{aligned} D\Big(\frac{2x+1}{x^4+3}\Big) &= \frac{D(2x+1)(x^4+3)-(2x+1)\cdot D(x^4+3)}{(x^4+3)^2} = \\ &= \frac{2\cdot(x^4+3)-(2x+1)\cdot 4x^3}{(x^4+3)^2} = \frac{6-4x^3-6x^4}{(x^4+3)^2}, \end{aligned}$$

där vi utnyttjade kvotregeln och derivatan av en potens. □

Exempel. Beräkna $f'(3)$ om $f(x) = \ln(5x^2)$.

Vi kan, om vi vill, först skriva om uttrycket för $f(x)$ med hjälp av logaritmlagarna. Vi har

$$f(x) = \ln(5x^2) = \ln 5 + \ln x^2 = \ln 5 + 2\ln x,$$

och alltså är $f'(x) = 0 + 2\cdot\frac{1}{x} = 2/x$. Omskrivningen $\ln x^2 = 2\ln x$ är bara giltig när $x > 0$, men det stör oss inte eftersom vi söker derivatan i $x = 3$. Vi får $f'(3) = 2/3$. □

Exempel. Beräkna $f'(-1)$ om $f(x) = \ln(5x^2)$.

Den här gången gör vi omskrivningen så här:

$$f(x) = \ln(5x^2) = \ln 5 + \ln x^2 = \ln 5 + \ln(-x)^2 = \ln 5 + 2\ln(-x),$$

och alltså är $f'(x) = 0 + 2\cdot\frac{-1}{-x} = 2/x$. Omskrivningen $\ln(-x)^2 = 2\ln(-x)$ är giltig eftersom $x < 0$. Vi får $f'(-1) = -2$. □

Exempel. Bestäm en ekvation för normalen till grafen av $f(x) = \sqrt{(\sqrt{x}\cdot\ln x)^4}$ i den punkt på grafen där första koordinaten är $x = 1$.

Punkten i fråga är $(1, f(1)) = (1, 0)$. Vi bestämmer $f'(1)$ genom att först beräkna $f'(x)$. Normalen har då riktningskoefficienten $-1/f'(1)$, eller är, om $f'(1) = 0$, parallell med y-axeln.

Innan vi gör det, gör vi rotutdragning som ger omskrivningen

$$f(x) = x(\ln x)^2,$$

som är giltig eftersom f bara är definierad för $x > 0$. Enligt produktregeln och kedjeregeln har f derivatan

$$f'(x) = 1\cdot(\ln x)^2 + x\cdot 2\ln x\cdot D(\ln x) = (\ln x)^2 + 2x\cdot\ln x\cdot(1/x) = (\ln x)^2 + 2\ln x.$$

Detta visar att $f'(1) = 0$, så normalen är parallell med y-axeln och går genom punkten $(1, 0)$. En ekvation för den ges då av $x = 1$. □

Här kommer en förklaring till varför det är viktigt att komma ihåg att formeln $D(\sin x) = \cos x$ förutsätter att x motsvarar en vinkel angiven i radianer.

Exempel. Låt $f(x) = \sin(x^\circ)$ och beräkna $f'(x)$.

Vi har att $x^\circ = 2\pi x/360 = x\pi/180$, så $f(x) = \sin(x\pi/180)$. Kedjeregeln ger $f'(x) = \cos(x\pi/180)\cdot D(x\pi/180) = (\pi/180)\cos(x^\circ)$. □

7.3.3 Sammansatta funktioner. Kedjeregeln.

Av de allmänna regler för derivering som togs upp i förra avsnittet är det **kedjeregeln** som bruka ställa till mest bekymmer för den som är ovan.

Du kan fräscha upp ditt minne för sammansatta funktioner genom att titta tillbaka till början av kapitlet om funktioner i del 1. För derivatan av en sammansatt funktion gäller alltså:

$$\frac{d}{dx}[h(g(x))] = h'(g(x)) \cdot g'(x)$$

under förutsättning att derivatorna i högerledet finns. Om vi betecknar $y = h(z)$, där $z = g(x)$, dvs. $y = h(g(x))$, så kan kedjeregeln uttryckas som

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

I detta sammanhang kallas, som tidigare påpekats, $g'(x) = \frac{dz}{dx}$ för den **inre derivatan** av $h(g(x))$.

Kedjeregeln är en mycket viktig räkneregel och används väldigt ofta i räkning med integraler och derivator. Vi presenterar därför en samling exempel på hur den används.

Exempel. En exponentialfunktion $f(x) = e^{bx}$, där b är en konstant, kan ses som en sammansättning av exponentialfunktionen med $(x) = bx$. Man behöver alltså inte ta med e^{bx} bland de elementära funktionerna, utan det räcker med ett kunna derivatan av den elementära funktionen $De^x = e^x$ och kedjeregeln får att inse att $De^{bx} = be^{bx}$. □

Exempel. Beräkna derivatan av $y = f(x) = \sqrt{x^2 + x - 8}$.

Vi kan skriva $y = \sqrt{z}$ med $z = x^2 + x - 8$ och använda kedjeregeln. Vi har

$$\frac{dy}{dz} = \frac{d(\sqrt{z})}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{z}} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+x-8}} \qquad \text{och} \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 + x - 8) = 2x + 1.$$

Alltså är

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+x-8}} \cdot (2x+1) = \frac{2x+1}{2 \cdot \sqrt{x^2+x-8}}.$$

På samma sätt visas allmänt med kedjeregeln att

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{z}) = \frac{d(\sqrt{z})}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{z}} \cdot \frac{dz}{dx},$$

dvs. att

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{g(x)}) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}.$$

□

Exempel.

a.
$$\frac{d}{dx}(\sqrt{1-x}) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$$

b.
$$\frac{d}{dx}(\sqrt{e^x+1}) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x+1}}$$

□

Exempel. Beräkna derivatan av $y = f(x) = \ln g(x)$, då $g(x)$ är en funktion av x och $g(x) > 0$.

Med $y = \ln z$ och $z = g(x)$ fås enligt kedjeregeln

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{d(\ln z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = = \frac{1}{z} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x).$$

Alltså
$$\frac{d}{dx} \ln g(x) = \frac{g'(x)}{g(x)},$$
som är en mycket användbar formel! □

Formeln
$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$
är förstås oberoende av vilket namn man ger variabeln. För $z = z(x)$ (z beror på x) är däremot
$$\frac{d}{dx}(\ln z) \neq \frac{1}{z}$$
utan
$$\frac{d}{dx}(\ln z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{dz}{dx}$$
enligt kedjeregeln.

Exempel. För alla x sådana att funktionen som deriveras är definierad gäller:

a.
$$\frac{d}{dx}[\ln(\sin x)] = \frac{\cos x}{\sin x},$$

b.
$$\frac{d}{dx}[\ln(x^2+x+4)] = \frac{2x+1}{x^2+x+4},$$

c.
$$\frac{d}{dx}[\ln(5x^2)] = \frac{5 \cdot 2x}{5 \cdot x^2} = 2/x.$$

□

Exempel. Funktionen $f(x) = \ln(-x)$ är definierad för $-x > 0$, dvs. $x < 0$. Enligt formeln ovan med $g(x) = -x$ blir derivatan

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x},$$

när $x < 0$. Eftersom $-x = |x|$ för negativa x kan detta skrivas

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}.$$

För positiva x är ju $|x| = x$ och därför är $\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$ även i detta fall. Alltså gäller att

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x} \quad \text{för alla } x \neq 0.$$

Allmännare ger nu en ny användning av kedjeregeln att

$$\frac{d}{dx} \ln|g(x)| = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

som alltså gäller när $g(x) \neq 0$. □

Exempel. Derivera $f(x) = \ln\left|\frac{2x+3}{x^2-1}\right|$.

Skriv först om $f(x)$ med hjälp av logaritmlagarna! Man får

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln|2x+3| - \ln|x^2-1| = \ln|2x+3| - \ln|(x+1)(x-1)| \\ &= \ln|2x+3| - \ln|(x+1)| - \ln|(x-1)| \end{aligned}$$

Då blir

$$f'(x) = \frac{2}{2x+3} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = 2 \cdot \frac{(x^2-1) - (2x+3)x}{(2x+3)(x^2-1)} = (-2) \cdot \frac{x^2+3x+1}{(2x+3)(x^2-1)}.$$

□

Exempel. Beräkna derivatan av $e^{2x} \cdot \sqrt{x^3+1}$.

Med kedjeregeln får man först att

$$\frac{d}{dx}(e^{2x}) = 2e^{2x} \quad \text{och} \quad \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^3+1}\right) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}.$$

Produktregeln ger nu att

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(e^{2x} \cdot \sqrt{x^3+1}\right) &= \frac{d}{dx}(e^{2x}) \cdot \sqrt{x^3+1} + e^{2x} \cdot \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^3+1}\right) \\ &= 2e^{2x} \cdot \sqrt{x^3+1} + e^{2x} \cdot \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}} \\ &= e^{2x} \frac{4(x^3+1) + 3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}. \end{aligned}$$

$\square$

Exempel. Derivera $\sin\sqrt{3x^2+1}$.

Sätt $y = \sin w$ med $w = \sqrt{z}$ och $z = 3x^2+1$. Då fås

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw}\cdot\frac{dw}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = \cos w\cdot\frac{1}{2\sqrt{z}}\cdot 6x = \cos(\sqrt{3x^2+1})\cdot\frac{1}{2\sqrt{3x^2+1}}\cdot 6x$$
$$= \frac{3x\cdot\cos\sqrt{3x^2+1}}{\sqrt{3x^2+1}}.$$

$\square$

Övningar

7.3.1 Beräkna derivatan där funktionen är definierad

a. $5x^3-6x+7$ b. $x^2+\dfrac{1}{x^2}$
c. $2e^x-3\cos x$ d. $x\cdot\sin x$
e. $2x^3\cdot\cos x$ f. $e^x\cdot\sqrt{9x}$
g. $1/\cos x$ h. $1/(x^2+5\ln x)$
i. $1/(1+\tan x)$ j. $x/\sin x$
k. $(2x+1)/(x+2)$ l. $(x^2+3)/(x^3+1)$
m. $e^x/\ln(x^2)$ n. $(x+1)/\sqrt{x}$
o. $(3x^2-2x+1)/(x^3+2x+1)$ p. $x^2\cdot 2^x$
q. $3^x/x^3$ r. $x^4\cdot e^x\cdot\sin x$
s. $\sqrt{x}\cdot(\ln x)/(x^2+1)$.

7.3.2 Beräkna

a. $f'(\pi/4)$ om $f(x)=\tan x$ b. $f'(1)$ om $f(x)=e^x\cdot\ln x$
c. $f'(-2)$ om $f(x)=(x+3)/(x^3+2)$ d. $f'(4)$ om $f(x)=2^x\cdot\ln\sqrt{x}$.

7.3.3 Antag att derivatan $g'(x)$ existerar. Bestäm en formel för derivatan av

a. $e^{g(x)}$ b. $\sin(g(x))$
c. $\cos(g(x))$ d. $\tan(g(x))$
e. $\big(g(x)\big)^n$ f. $1/g(x)$.

7.3.4 Bestäm $f'(x)$ om $f(x)$ är

a. $e^{4x}+e^{1-2x}$ b. $\sin(3x+1)$
c. $\cos(x^2)$ d. $\cos^2 x$
e. $\sin(5e^x)$ f. $\sqrt{21x-1}$
g. $\sqrt{3x^4+7}$ h. $(x^2+5x)^2$
i. $(1-x^4)^3$ j. $\ln(7x+3)+\ln(1-x)$
k. $\ln(4-3x-5x^2)$ l. $e^{x^2+\sqrt{x}}$
m. $\tan(\ln|x|)$ n. $\cot\sqrt{x}$
o. $\ln(\cos x)$ p. $\ln|\tan x|$
q. $\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$ r. $\ln\dfrac{1+3x}{1-3x}$
s. $\ln\left|\dfrac{2x-1}{x^2+x+1}\right|$ t. $\ln\dfrac{3x^2+7x+1}{1-x^2+5x^3}$.

7.3.5 Beräkna

a. $f'(0)$ då $f(x) = \ln(5-3x)$
b. $f'(1/2)$ då $f(x) = 3\cos(\pi x)$
c. $f'(7)$ då $f(x) = e^{x^2-5x-14}$
d. $f'(\pi/4)$ då $f(x) = \ln(20\tan x)$
e. $f'(2)$ då $f(x) = \ln\dfrac{16-4x}{3x-1}$
f. $f'(-1)$ då $f(x) = \ln\left|\dfrac{7x^2+5x-3}{6-3x^2+x^5}\right|$.

7.3.6 Derivera

a. $e^{x^2}\cdot\ln(2x+7)$
b. $\sqrt{x}\cdot\cos(x^3)$
c. $\sin(2-x)\cdot\cos 5x$
d. $e^{2x}/\sqrt{x^3+1}$.

7.3.7 Beräkna

a. $f'(0)$ då $f(x) = e^{3x}\cdot\sqrt{5x+4}$
b. $f'(1)$ då $f(x) = x^3\cdot\ln(2-x^2)$
c. $f'(-3)$ då $f(x) = \sqrt{x^2+7}\cdot\ln[(x^2-1)/(x+4)]$.

7.3.8 Derivera

a. $\cos^2 3x$
b. $e^{\sin(x^2)}$
c. $\sin(e^{x^2})$
d. $e^{\sin^2 x}$
e. $\ln|\tan(1-x^2)|$
f. $e^{3\sqrt{1-2x^2}}$
g. $\ln(1+e^{\sqrt{x}})$.

7.3.9 Bestäm ekvationer för tangent och normal i punkten $(x_0, f(x_0))$ på grafen till f, då

a. $f(x) = x^3$ och $x_0 = 2$
b. $f(x) = \ln x$, $x_0 = 3$
c. $f(x) = e^x - x$, $x_0 = 0$
d. $f(x) = 2\cdot\ln(5-x)$, $x_0 = 4$
e. $f(x) = x\cdot\cos x$, $x_0 = \pi$
f. $f(x) = (x^2+1)/(3x+1)$, $x_0 = -2$
g. $f(x) = \ln(3x^2+5x+3)$, $x_0 = -1$
h. $f(x) = e^{x^2}\cdot\sqrt{x^3+3}$, $x_0 = 1$
i. $f(x) = \ln\left|\dfrac{4-7x-3x^2}{2x^3+6x^2+1}\right|$, $x_0 = -3$.

7.4 Derivator av högre ordning

Som vi sett har definitionen av derivata $f'(a)$ av en funktion f i ett tal a, sin utgångspunkt i en önskan att mäta den "momentana" förändringen av funktionens värde i a. Eftersom denna i allmänhet är olika för olika tal a är det naturligt att uppfatta derivatan som en ny funktion $f'(x)$.

Funktionen som tar absolutbeloppet av ett tal, $f(x) = |x|$, är ett exempel på en funktion som inte har derivata om $x = 0$. Generellt gäller att derivatans definitionsmängd kan vara mindre än den ursprungliga funktionens, men aldrig större.

Om funktionen f' i sin tur har en derivata kallas denna **andra derivatan av f** och betecknas ofta med $f'', y'', \frac{d^2f}{dx^2}$ eller $D^2 f$. Man kan sedan fortsätta att derivera flera gånger och få derivator av allt högre ordning. Bland olika beteckningar som finns för **derivatan av ordning n** är: $f^{(n)}, y^{(n)}, \frac{d^nf}{dx^n}, D^n f$.

Exempel. Bestäm $f^{(n)}$ då $f(x) = e^{2x}$.

Vi observerar att $f'(x) = 2e^{2x}, f''(x) = 2\cdot 2e^x = 2^2e^{2x}$. För varje gång vi deriverar kommer det fram en 2:a genom inre derivatan. Detta ger $f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}$. □

Andraderivatan som acceleration.

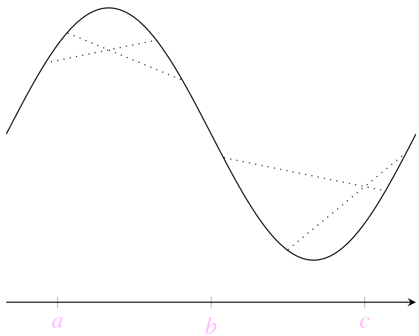
Låt oss tänka oss att vi färdas längs en väg med start vid tidpunkten $t = 0$. Den sträcka vi färdats efter t minuter betecknar vi $x(t)$. Du känner säker till att $x'(t)$ är det som kallas **farten** vid tidpunkten t. Andraderivatan $x''(t)$ är ju derivatan av $x'(t)$ och alltså den hastighet med vilken $x'(t)$ ändras, dvs. **accelerationen**.

Andraderivatans betydelse för grafen till en funktion.

Med hjälp av $f''(x)$ kan vi se hur $f'(x)$ växer och avtar, dvs. hur riktningskoefficienten för tangenten till grafen av $f(x)$ ändras då x varierar. Exempelvis har vi

om $f''(x) \geq 0$ på ett intervall, så är $f'(x)$ växande på intervallet,
om $f''(x) \leq 0$ på ett intervall, så är $f'(x)$ avtagande på intervallet.

Lägg märke till att andraderivatan inte ger direkt information om förstaderivatans tecken, eller om ursprungsfunktionens tillväxt.



Figur 26: Några kordor till grafen av f.

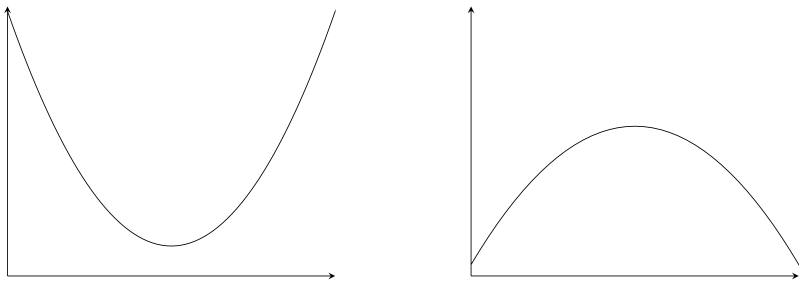
En **korda** till en graf är en sträcka mellan två punkter på den. En funktion är **konvex** på ett intervall om alla kordor till grafen, mellan punkter med förstakoordinat i intervallet, ligger ovanför grafen (utom i kordans ändpunkter). Ligger i stället alla sådana kordor nedanför för grafen är funktionen **konkav** på intervallet. I figur 26 ser man att f är konkav på intervallet $[a,b]$ och konvex på $[b,c]$. Den är varken det ena eller andra på intervallet $[a,c]$.

Populärt kan man säga att en funktion är konvex om grafen "vänder uppåt" på intervallet eller ser ut som åtminstone ena mungipan på en glad mun. Den är konkav om grafen i stället "vänder nedåt" på intervallet eller ser ut som del av en sur mun.

Generellt gäller att

om $f''(x) > 0$ på ett intervall, så är funktion f konvex där,
om $f''(x) < 0$ på ett intervall, så är funktion f konkav där.

Följande två figurer illustrerar två typiska utseenden



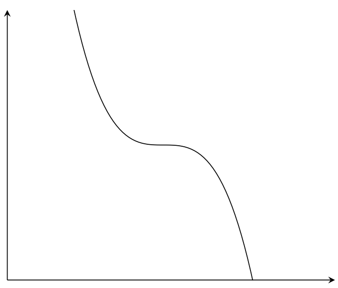
(a) $f''(x) > 0$, konvex (b) $f''(x) < 0$, konkav

Figur 27: Exempel på graf till en konvex respektive konkav funktion.

Grafen till vänster visar en funktion med positiv andraderivata och därmed växande derivata, dvs. f är konvex. Den till höger, visar en med negativ andraderivata, alltså med avtagande derivata, dvs. f är konkav.

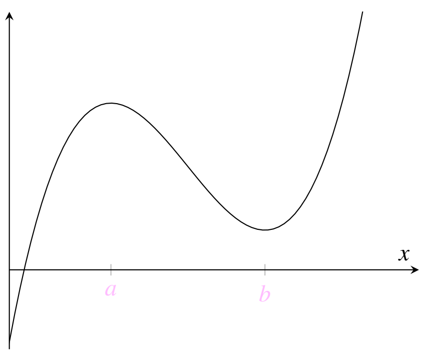
Exempel. Skissa grafen till en funktion med derivata som är negativ överallt, men vars andraderivata ibland är positiv och ibland negativ. □

Vi ska alltså para ihop delar av en glad och en sur mun och samtidigt se till att det blir grafen av en avtagande funktion. En sådan graf kan se ut som i figur 28.



Figur 28: Grafen till en avtagande funktion som först är konvex och sedan konkav.

7.5 Maximi- och minimiproblem



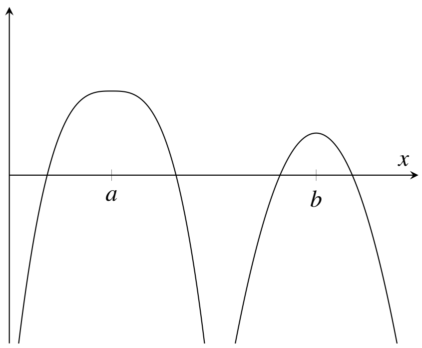
Figur 29: En lokal maximipunkt a och minimipunkt b till f.

Vi förutsätter att vi har en funktion f som är definierad i alla tal i närheten av en punkt x_0. Om då $f(x) \leq f(x_0)$, för alla tal x i något intervall runt x_0, så sägs x_0 vara en **lokal maximipunkt** för f.

På liknande vis är x_0 en **lokal minimipunkt** om $f(x) \geq f(x_0)$ för alla x i något intervall kring x_0.

I dessa fall säger man också att f har ett lokalt maximum respektive minimum i x_0.

I figur 29 är sådana intervall runt maximipunkten a och minimipunkten b till f markerade.



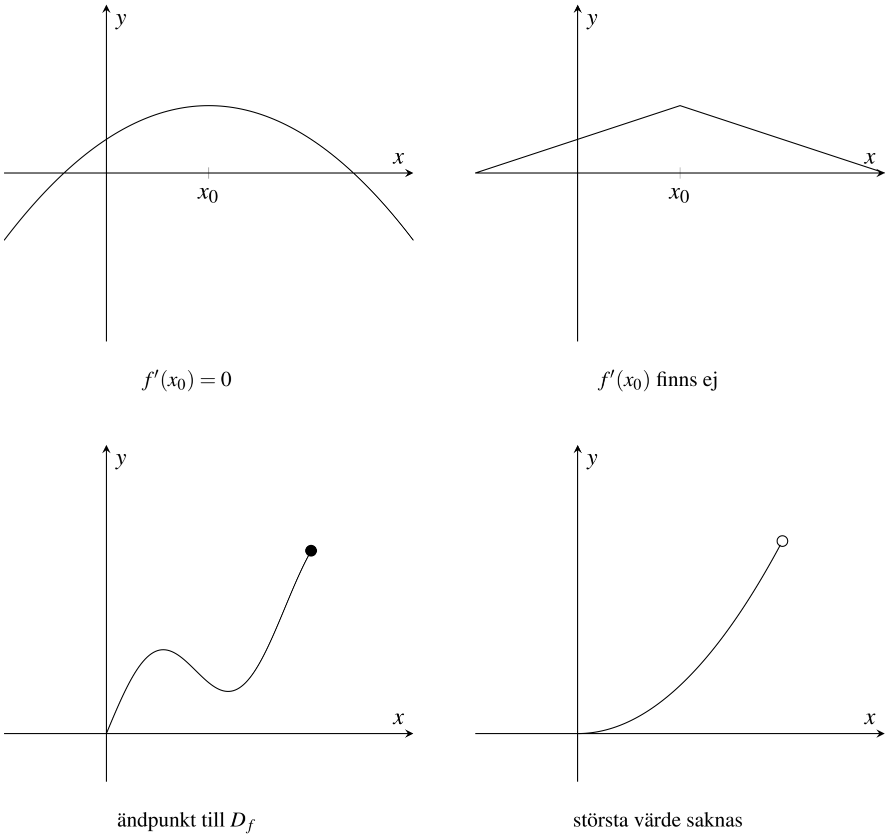
Figur 30: Funktionen f har ett maximum i b, ett lokalt maximum i a, men minimum saknas.

Funktionens värde i en lokal maximi- respektive minimipunkt kallas lokalt **maximi-** respektive **minimivärde** till funktionen. Det är inte ovanligt att man i stället kallar sådana värden för **lokala maxima** respektive **minima**.

Ett värde till en funktion f som är större än alla andra värden som funktionen antar kallas ett **största värde**, eller ett (globalt) maximum till f. På motsvarande sätt definieras ett **minsta värde**, eller ett (globalt) minimum till en funktion.

Man ska lägga märke till att det långt ifrån alltid är så att en funktion har sådana värden.

Ett funktionsvärde kan förstås vara ett lokalt maximum, utan att vara ett maximum. Men det är klart att om ett maximum finns så är det också ett lokalt maximum, och motsvarande för minimum.



Figur 31: Exempel på olika situationer att ta hänsyn till då man söker största/minsta värde till en funktion.

Vill man hitta lokala maximi- och minimipunkter till en funktion f ska man leta bland följande tre typer av punkter:

1) Punkter a,, där $f'(a) = 0$, dvs. där tangenten är parallell med x-axeln. En sådan punkt kallas en **stationär punkt** till f.

2) Punkter a, där $f'(a)$ inte finns, t.ex. spetsar på grafen.

3) **Randpunkter**, dvs. ändpunkterna till definitionsintervallet.

Punkter som faller under 1) eller 2) kallas **kritiska punkter** till f. Det är viktigt att observera att en kritisk punkt till en funktion inte behöver vara ett lokalt maximum. Ett exempel på detta är funktionen $f(x) = x^3$, som är strängt växande men har derivatan 0 i $x = 0 : f'(x) = 3x^2$, så $f'(0) = 0$.

Stationära punkter som varken är lokala maximi- eller minimipunkter till funktionen kallas **terrasspunkter**.

För att avgöra om en stationär punkt är en lokal maximi- eller minimipunkt till en funktion kan man använda sig av någon av följande två metoder:

Metod 1:

- punkten a är en lokal maximipunkt om $f'(x)$ växlar från positiv till negativ i a.
- punkten a är en lokal minimipunkt om $f'(x)$ växlar från negativ till positiv i a.

Metod 2:

- punkten a är en lokal maximipunkt om $f'(a) = 0$ och $f''(a) < 0$,
- punkten a är en lokal minimipunkt om $f'(a) = 0$ och $f''(a) > 0$.

Det första fallet i Metod 2 ger ju nämligen att $f'(x)$ avtar strängt nära a. Eftersom $f'(a) = 0$ betyder det att f' växlar från positiv till negativ, som i första fallet i Metod 1. På liknande vis förstår man att det andra fallet i Metod 2 är samma som det andra fallet i Metod 1. Observera att om f'' är komplicerad att beräkna för hand, så är Metod 1 att föredra framför Metod 2.

Exempel. Sök lokala maximi- och minimipunkter till $f(x) = x^3 + 6x^2$.

Bilda först $f'(x) = 3x^2 + 12x = 3x(x+4)$. Ekvationen $f'(x) = 0$ har rötterna $x_1 = -4$ och $x_2 = 0$.

Teckenstudium:

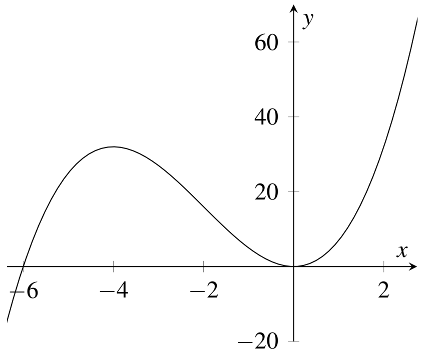
	$x < -4$	$x = -4$	$-4 < x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f'(x)$	$+++$	0	$---$	0	$+++$
$f(x)$	$\nearrow$	32	$\searrow$	0	$\nearrow$
	växande	maximum	avtagande	minimum	växande

ger enligt Metod 1 lokalt maximum $f(-4) = (-4)^3 + 6 \cdot (-4)^2 = 32$ och lokalt minimum $f(0) = 0$. Alternativt kan man använda Metod 2: $f''(x) = 6x + 12 = 6(x+2)$ ger $f''(-4) = -12 < 0$, dvs. maximum för $x = -4$, resp. $f''(0) = +12 > 0$, dvs. minimum för $x = 0$. Punkterna 2) och 3) i vår undersökning ger ingenting eftersom $f'(x) = 3x^2 + 12x$ existerar för alla x, och randpunkter saknas, eftersom $f(x) = x^3 + 6x^2$ är definierat för alla x, $-\infty < x < \infty$.

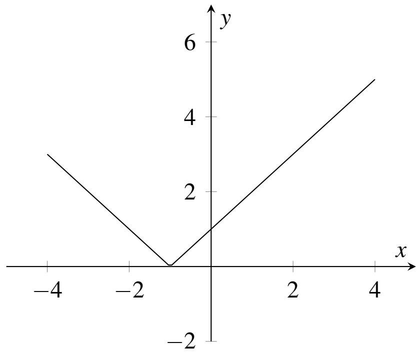
Svar: Lokalt maximum $f(-4) = 32$ och lokalt minimum $f(0) = 0$.

Lägg märke till att funktionen $f(x) = x^3 + 6x^2$ saknar såväl största som minsta värde eftersom $f(x) \to +\infty$ då $x \to +\infty$ och $f(x) \to -\infty$, då $x \to -\infty$. $\square$

Exempel. Låt $f(x) = |x+1|$ för $-3 \le x < 2$. Funktionen $f(x)$ har ett lokalt minimum $f(-1) = 0$ och ett lokalt maximum $f(-3) = 2$. Vidare har den ett minsta värde $f(-1) = 0$ men saknar största värde, ty $x = 2$ tillhör inte definitionsmängden. $\square$



Figur 32: En del av grafen till $f(x) = x^3 + 6x^2$.



Figur 33: Grafen till $f(x) = |x+1|$, $-3 \leq x < 2$.

Övningar

7.5.1 Beräkna $f''(2)$ om $f(x) = \sqrt{x} + \ln x$.

7.5.2 Bestäm $f''(x)$ om $f(x)$ är

a. $x^3 + 1/x^3$

b. $e^x \cdot \cos x$

c. $\sqrt{x} \cdot \ln x$

d. $(\sin x)/x$.

7.5.3 Bestäm konstanten k så att $y = e^{kx}$ satisfierar differentialekvationen

a. $y' + 5y = 0$

b. $y'' - y' - 2y = 0$

c. $y''' + 4y'' + y' - 6y = 0$.

7.5.4 Bestäm de reella konstanterna a och b så att $y = e^{ax} \cdot \cos bx$ satisfierar

a. $y'' + 2y' + 3y = 0$

b. $y''' - y'' + 3y' + 5y = 0$.

7.5.5 Sök lokala maxima och minima samt största och minsta värde, om $f(x)$ är

a. x^2+4x+5
b. $2+4x-3x^2$
c. $3x-x^3+2$
d. $3x^4+8x^3+12x^2+12x+1$
e. $8x^3+3x^2-6x^4-6x$
f. $|2x+1|,\ -3<x\leq 1$
g. $|x^2-4|,\ -3\leq x\leq 4$
h. e^x-2x
i. $x+\ln x-2\ln(x-1)$
j. $e^x\cdot\cos x$
k. $\sqrt{x^2+x+1}\cdot e^{-x/2}$
l. $\sqrt{x^2-3x+2}/x$.

7.6 Integraler

Tidigare i detta kapitel har vi utgått från en funktion och beräknt dess derivata. Nu skall vi i stället försöka bestämma en funktion utgående från dess derivata. Vi har redan konstaterat att om funktionen f är sådan att $f'(x)=0$ för alla x på ett intervall så är funktionen konstant där, dvs. $f(x)=C$, för något tal C. Hur är det om vi istället vet att $f'(x)=g(x)$ där $g(x)$ är en given funktion? Vi vill då alltså veta vilka funktioner, som har $g(x)$ som derivata.

7.6.1 Primitiva funktioner, obestämda integraler

Vi börjar med att definiera begreppet primitiv funktion.

Låt f vara en funktion definierad på ett intervall. Funktionen F sägs då vara en **primitiv funktion** till f på intervallet om $F'(x)=f(x)$ där.

Att bestämma en primitiv funktion är alltså det omvända till att derivera.

Exempelvis är alltså $F(x)=x^2$ en primitiv funktion till $f(x)=2x$, eftersom $D(x^2)=2x$. Också $F(x)=x^2+1$ är en primitiv funktion till $2x$. I själva verket är ju $F(x)=x^2+C$ primitiv funktion till $2x$ för varje val av konstant C. Följande sats innebär att $f(x)=2x$ inte har några andra primitiva funktioner.

Antag att F_0 är en primitiv funktion till f på ett intervall. Då är F också en primitiv funktion till f där precis när

$$F(x)=F_0(x)+C \quad \text{för alla} \quad x.$$

Lägg märke till att satsen inte garanterar att funktionen f har någon primitiv funktion alls! Däremot säger satsen hur *samtliga* primitiva funktioner ser ut, om vi väl har hittat *en* sådan.

Beviset av satsen är inte svårt. Funktionen $F_0(x)+C$ har derivatan $F_0'=f$, eftersom F_0 är en primitiv funktion till f och C en konstant. Alltså är också F_0+C en primitiv funktion till f.

Antag nu att F också har derivata $F'=f$. Då gäller att $(F-F_0)'=F'-F_0'=f-f=0$, så $F-F_0$ är en konstant som vi kan kalla C. Detta ger $F=F_0+C$.

För varje konstant C är alltså $F_0 + C$ en primitiv funktion till f och inga andra finns. Det är satsens innebörd.

Att bestämma primitiva funktioner är en fråga om att använda sina deriveringskunskaper baklänges. Följande beteckning är vanlig i samband med primitiva funktioner.

Med $\int f(x)\,dx$ menar vi samtliga primitiva funktioner till f.
Vi kallar också $\int f(x)\,dx$ **den obestämda integralen av f**.

I tabell 2 ses en lista över primitiva funktioner för några grundläggande funktioner. Dessa formlers riktighet kontrolleras genom att högerledens derivator jämförs med funktionerna efter integraltecknet i motsvarande vänsterled. Att till exempel att $\ln|x|$ har derivatan $1/x$ vet vi sedan tidigare, vilket ger nummer 2 i listan. I just detta exempel finns en liten komplikation eftersom defintionsmängden till $\ln|x|$ inte är ett intervall utan föreningen av två sådana: $(-\infty, 0)$ och $(0, \infty)$. Det betyder att talet C i formeln kan vara olika på de två delarna.

På samma sätt har vi, eftersom $a^x = e^{x\ln a}$, genom att använda kedjeregeln att

$$D\Big(\frac{a^x}{\ln a}\Big) = \frac{1}{\ln a}D(e^{x\ln a}) = \frac{1}{\ln a}\cdot e^{x\ln a}\cdot D(x\ln a) = \frac{1}{\ln a}\cdot e^{x\ln a}\cdot \ln a = e^{x\ln a} = a^x$$

vilket ger nummer 11 i tabell 2. De andra formlerna visas på liknande sätt.

De kända deriveringsreglerna ger också upphov till motsvarigheter för integration. För att bevisa följande formler så jämför man de båda sidornas derivator.

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx,\ k \text{ en konstant}$$

Vi tillämpar nu dessa regler på ett par exempel.

Exempel. Beräkna alla primitiva funktioner till $e^x + 4x$.

Genom att använda reglerna ovan och två av standardintegralerna i tabell 2 har vi att

$$\int (e^x+4x)\,dx = \int e^x\,dx + 4\int x\,dx = e^x + 4x^2/2 + C = e^x + 2x^2 + C. \qquad \square$$

Exempel. Bestäm alla primitiva funktioner till $\dfrac{x+1}{1+x^2}$.

I tabell 2 hittar vi integralen till $\dfrac{1}{1+x^2}$, så om vi delar upp i två delar

$$\int \frac{x+1}{1+x^2}\,dx = \int \frac{x}{1+x^2}\,dx + \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int \frac{x}{1+x^2}\,dx + \arctan x + C.$$

1. $\int x^b\,dx = \frac{x^{b+1}}{b+1} + C$ om $b \neq -1$
2. $\int x^{-1}\,dx = \ln|x| + C$
3. $\int e^x\,dx = e^x + C$
4. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
5. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
6. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$
7. $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$
8. $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$
9. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$
10. $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$
11. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \ (0 < a \neq 1)$
12. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$

Tabell 2: Några standardintegraler.

så är vi halvvägs. Nummer 12 i tabell 2 är användbar när man har en kvot. Om vi sätter $f(x) = 1+x^2$ i den formeln så får vi

$$\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \ln\left|1+x^2\right| + C.$$

Det ger att

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + C.$$

Sammanfattar vi nu så får vi att

$$\int \frac{x+1}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + \arctan x + C$$

är lösningen till vårt problem. Här kan man undra varför det inte blir $2C$ som konstant i högerledet. Det spelar faktiskt ingen roll om man skriver $2C$ eller C efter som C är en godtycklig konstant. □

Låt k vara en konstant och antag att $f = F'$, dvs att F är en primitiv funktion till f. Kedjeregeln och produktregeln för derivering ger

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{k}F(kx)\right) = 0 + \frac{1}{k}(kF'(kx)) = F'(kx) = f(kx).$$

Det betyder att

$$\int f(kx)\,dx = \frac{F(kx)}{k},$$

vilket är en mycket användbar formel. En annan formel får vi om vi istället för att multiplicera med en konstant k adderar k:

$$\frac{d}{dx}\big(F(k+x)\big) = F'(k+x) = f(k+x).$$

Det betyder att

$$\int f(k+x)\,dx = F(k+x),$$

Vi har alltså nu visar att följande regler gäller då man räknar med integraler:

$$\int f(kx)\,dx = \frac{F(kx)}{k},$$
$$\int f(k+x)\,dx = F(k+x),$$

Exempel. Beräkna alla primitiva funktioner till $\sin(5x)$.

Genom att använda den första regeln ovan och att $-\cos x$ är en primitiv funktion till $\sin x$ enligt tabellen över standardintegraler, så får vi

$$\int \sin(5x)\,dx = \frac{-\cos(5x)}{5} + C. \qquad □$$

Exempel. Beräkna alla primitiva funktioner till $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$.

Vi har att $f(x) = (1-2x)^{-1/2}$. Enligt den första standardintegralen i tabell 2 är

$$\int x^{-1/2}\,dx = \frac{x^{1+(-1/2)}}{1+(-1/2)} + C = \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C.$$

Den första regeln ovan ger

$$\int (-2x)^{-1/2}\,dx = 2\frac{1}{(-2)}(-2x)^{1/2} + C = -(-2x)^{1/2} + C.$$

Då ger den andra regeln att

$$\int (1-2x)^{-1/2}\,dx = 2\frac{1}{(-2)}(1-2x)^{1/2} + C = -(1-2x)^{1/2} + C = -\sqrt{1-2x} + C.$$

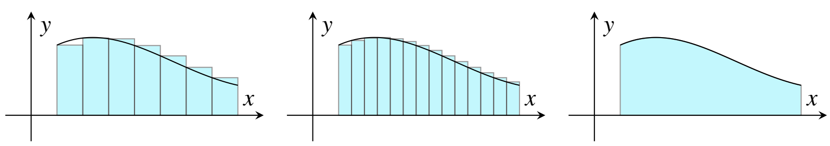
□

7.6.2 Bestämda integraler

Utgångspunkt för definitionen av begreppet bestämd integral är problemet att beräkna arean av ett område i planet. Idén till en lösning av detta fanns redan i antiken (Archimedes). Täcker man området med ett ändligt antal rektanglar kan man summera deras area. Gör man i steg rektanglarna mindre och fler kan man täcka det ursprungliga området på ett bättre och bättre sätt. Efter ett tag är det marginell skillnad mellan de två områdena. Det ursprungliga områdets area bör vara gränsvärdet av den sammanlagda arean av rektenglarna i de olika stegen. Vi skall koncentrera oss på det speciella problemet att beräkna arean mellan x-axeln och grafen till en funktion f, där vi inledningsvis antar att $f(x) \geq 0$, för alla x i ett intervall $[a,b]$.

Det är inte givet, och heller inte alltid sant, att det går att mäta arean av ett sådant område på det sätt som ovan antytts: det gränsvärde som det talas om kanske inte finns, eller blir olika beroende på hur man gör indelningen i de olika stegen.

Man kan emellertid bevisa att om vi förutsätter att f är kontinuerlig på intervallet $[a,b]$, så fungerar metoden och ger ett gränsvärde oberoende av hur de olika stegen genomförs.



Figur 34: Approximation av area med rektanglar.

Figur 34 illustrerar idén. Det streckade området i den högra figuren är ”området under grafen till f” och dess area A är gränsvärdet av de sammanlagda areorna av allt smalare och smalare rektanglar som figuren antyder.

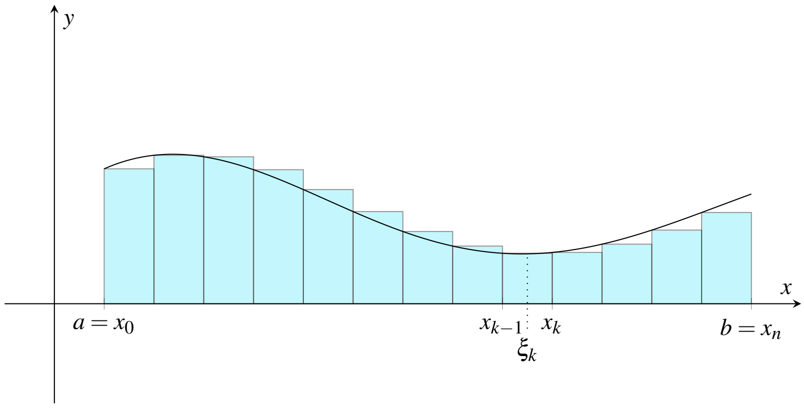
Nu beskriver vi metoden mer i detalj.

Antag att $f(x)$ är en icke-negativ kontinuerlig funktion, dvs $(f(x) \geq 0)$, på intervallet $[a,b]$. Vi börjar med att dela upp intervallet i n lika långa delintervall. Varje delintervall har alltså längden $\Delta x = (b-a)/n$. Sätt

$$x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, x_2 = a + 2\Delta x, \ldots, x_n = a + n\Delta x = b.$$

I varje delintervall $[x_{k-1}, x_k], k = 1, \ldots, n$, väljer vi sedan ut en punkt, ξ_k, och bildar **Riemannsumman**

$$R_n = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \cdots + f(\xi_n)\Delta x = (f(\xi_1) + f(\xi_2) + \cdots + f(\xi_n))\Delta x.$$



Figur 35: R_n = summan av areorna av de streckade rektanglarna.

Observera att talet $f(\xi_k)\Delta x$ är arean av rektangeln med bas intervallet $[x_{k-1}, x_k]$ och höjd $f(\xi_k)$.

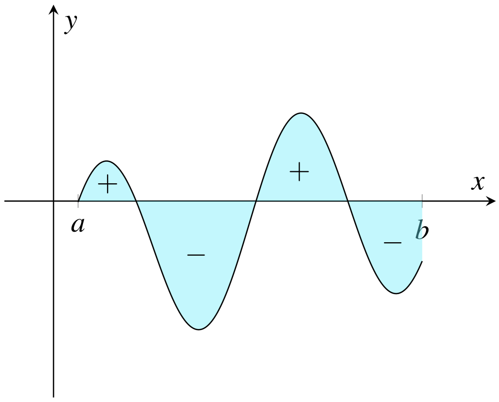
Eftersom vi förutsätter att f är kontinuerlig på intervallet $[a,b]$ kommer följden R_n av Riemannsummor att närma sig ett bestämt gränsvärde J när n går mot ∞. Gränsvärdet är dessutom oberoende av hur vi väljer punkterna $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Talet J kallas då för **(den bestämda) integralen av f** på intervallet $[a,b]$ och skrivs

$$J = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Vi har alltså

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \Big(f(\xi_1) + f(\xi_2) + \cdots + f(\xi_n)\Big)\Delta x.$$

Beteckningen för integralen är vald för att påminna om denna definition. Symbolen $\int$ är ett stiliserat S (för summa) och dx har fått ersätta $\Delta x = (b-a)/n$.

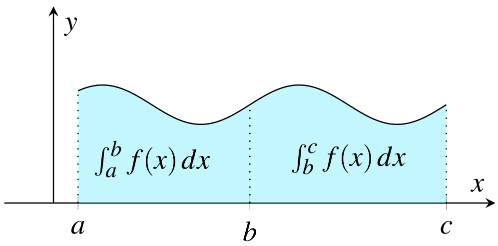


Figur 36: Integralen är arean mellan grafen och x-axeln med tecken.

Vi har hittils förutsatt att funktionen var icke-negativ på intervallet och vårt syfte var att beräkna en area. Tekniken ovan går emellertid att använda även på negativa funktioner och funktioner med varierande tecken. Man kan fortfarande tolka integralen som arean av det område som stängs in mellan funktionskurvan och x-axeln, men arean av områden under x-axeln skall räknas med minustecken, så som figur 36 illustrerar.

Det finns några enkla räkneregler för integraler, som för kontinuerliga funktioner, följer direk av att vi kan uttrycka den som gränsvärde av Riemannsummor.

$$
\begin{aligned}
\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \\
\int_a^b k\cdot f(x)\,dx &= k\cdot \int_a^b f(x)\,dx,\ k \text{ en konstant} \\
\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx
\end{aligned}
$$



Figur 37: Integralen är arean mellan grafen och x-axeln med tecken.

De två första reglerna har direkta motsvarigheter för primitiva funktioner, se förra avsnittet. Den geometriska innebörden av den sista regeln illustreras i figur 37.

I $\int_a^b f(x)$ har det hittills varit underförstått att $a < b$. Det kan emellertid vara praktiskt att inte förutsätta detta. Om $a > b$ sätter vi

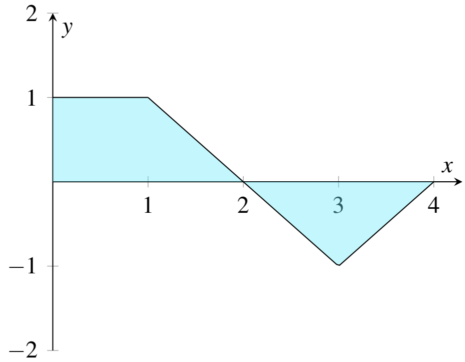
$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx,$$

och om $b = a$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Med dessa konventioner fungerar den sista räkneregeln i rutan ovan även om talet c inte ligger mellan a och b.

Exempel. Låt oss definiera funktionen $f(x)$ på intervallet $[0,4]$ genom att ange dess graf, se figur 38. Då är



Figur 38: Beräkna integralen av funktionen genom att lägga samman areorna.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1,\ \int_1^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2},\ \int_2^3 f(x)\,dx = -\frac{1}{2},\ \int_3^4 f(x)\,dx = -\frac{1}{2},$$

vilket ger

$$\int_0^4 f(x)\,dx = 1 + \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}. \qquad \square$$

7.6.3 Integralkalkylens huvudsats

En högst berättigad fråga att ställa sig efter att ha läst de två föregående avsnitten är: Vad iallsindar har obestämda integraler (primitiva funktioner) med (bestämda) integraler att göra? De förstnämnda är ju funktioner som fås genom att göra motsatsen till att derivera och de andra ger tal som ger ett mått på arean mellan x-axeln och en funktions graf. Svaret på frågan får vi i följande mycket centrala sats som säger att man kan beräkna bestämda integraler med hjälp av primitiva funktioner. Beviset av satsen ligger utanför den här kursens innehåll.

Integralkalkylens huvudsats. Antag att $f(x)$ är en kontinuerlig funktion på $[a,b]$ och $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$ på $[a,b]$ dvs.

$$F'(x) = f(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Då är

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Man ser ofta formeln i satsen skrivas så här:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \big[F(x)\big]_a^b,$$

där alltså $\quad \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a).$

Integralkalkylens huvudsats återför alltså problemet att beräkna en (bestämd) integral på problemet att hitta en primitiv funktion till integranden.

Anmärkning. Enligt satsen räcker det att hitta en (1) primitiv funktion. Det finns alltså ingen anledning att ta med den konstant som dyker upp vid bestämning av (alla) primitiva funktioner.

Exempel. Beräkna integralen $\int_0^{1.5} e^{-x}\,dx$.

En primitiv funktion till funktionen $f(x) = e^{-x}$ är $F(x) = -e^{-x}$. Därför är

$$\int_0^{1.5} e^{-x}\,dx = \big[-e^{-x}\big]_0^{1.5} = -e^{-1.5} - (-e^{-0}) = 1 - e^{-1.5}.$$

□

Exempel. Beräkna arean av området som begränsas av koordinataxlarna och grafen av funktionen $y = \frac{1-x}{1+x}$.

Vi börjar med att analysera funktionen för att kunna rita grafen. Kurvans skärningspunkter med koordinataxlarna är $(1,0)$ och $(0,1)$, ty $y = 0 \Leftrightarrow x = 1$ och $x = 0 \Leftrightarrow y = 1$. Vidare är

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = -1 \text{ och } \lim_{x\to -1^+} y(x) = \infty.$$

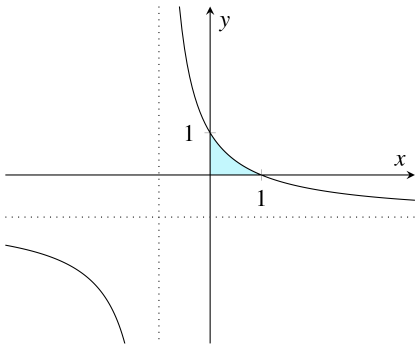
Alltså är linjerna $y = -1$ och $x = -1$ asymptoter till kurvan.

$$y' = \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2} < 0 \Rightarrow y \text{ är avtagande.}$$

Med hjälp av denna information kan vi skissa kurvan och centrala delen av grafen finns i figur 39

Arean A är nu integralen av funktionen från $x = 0$ till skärningen med x-axeln, dvs $x = 1$. Vi får alltså

$$A = \int_0^1 \frac{1-x}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{-(1+x)+2}{1+x}\,dx = \int_0^1 \left((-1) + \frac{2}{1+x}\right)dx$$
$$= -\int_0^1 dx + 2\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = -1 + 2\Big[\ln|1+x|\Big]_{x=0}^{x=1} = -1 + 2\ln 2.$$



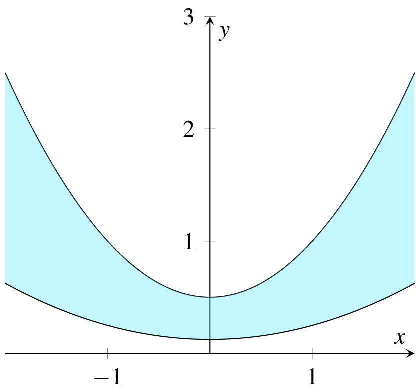
Figur 39: Centrala delen av grafen till $f(x) = (1-x)/(1+x)$.

Här delade vi upp integranden i två delar som båda är standardintegraler. $\square$

Exempel. Beräkna arean av området mellan

$$f(x) = 1 + (x^2+1)/2 \text{ och } g(x) = (x^2+1)/8 \text{ för } -1 \le x \le 1.$$

Området vars area vi ska beräkna finns i figur 40.



Figur 40: Området mellan graferna av till f och g.

Arean av området mellan kurvan $y = f(x)$ och x-axeln är

$$A_1 = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx.$$

Arean av området mellan kurvan $y = g(x)$ och x-axeln är

$$A_2 = \int_{-1}^{1} g(x)\,dx.$$

Den sökta arean är alltså

$$A = A_1 - A_2 = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \int_{-1}^{1} g(x)\,dx.$$

Med hjälp av integralkalkylens huvudsats får man nu

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (1+(x^2+1)/2)\,dx = \left[x + \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\right]_{-1}^{1}$$
$$= 2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+1\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}-1\right) = \frac{10}{3}$$

och

$$\int_{-1}^{1} g(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (x+1)^2/8\,dx = \left[\frac{(x+1)^3}{3\cdot 8}\right]_{-1}^{1} = \frac{2^3}{3\cdot 8} - 0 = \frac{1}{3}$$

Den sökta arean är alltså

$$A = \frac{10}{3} - \frac{1}{3} = \frac{9}{3} = 3.$$

□

Övningar

7.6.1 Bestäm alla primitiva funktioner till $f(x)$ då

a. $f(x) = 2\sin x + \cos x$
b. $f(x) = 1/\sqrt{x}$
c. $f(x) = 1/x + e^x$
d. $f(x) = 10^x$

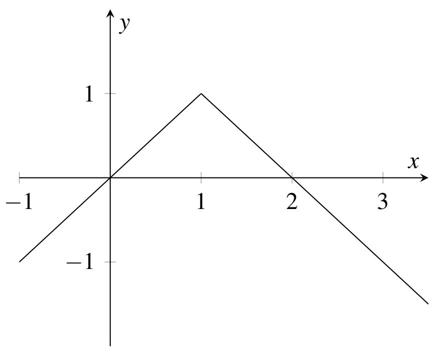
7.6.2 Bestäm alla primitiva funktioner till $f(x)$ då

a. $f(x) = \cos(x+4)$
b. $f(x) = 1/\sqrt{1+x}$
c. $f(x) = e^{3x}$
d. $f(x) = 1/(x+5)$
e. $f(x) = \sin(2x)$
f. $f(x) = \sqrt{1-x}$

7.6.3 Bestäm alla primitiva funktioner till $f(x)$ för följande funktioner. (*Tips:* Skriv kvoterna så att täljaren är derivatan av nämnaren och använd nummer 12 i tabell 2.)

a. $f(x) = (x+8)/(1+x^2)$
b. $f(x) = (x^2)/(1+x^3)$
c. $f(x) = \cos x/\sin x$
d. $f(x) = \tan x$

7.6.4 Funktionsgrafen till $y = f(x)$ finns nedan.



Beräkna följande integraler.

a. $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$

b. $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$

c. $\displaystyle\int_{2}^{1} f(x)\,dx$

d. $\displaystyle\int_{1}^{1} f(x)\,dx$

7.6.5 Beräkna följande integraler.

a. $\displaystyle\int_{0}^{1} x^2\,dx$

b. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \cos x\,dx$

c. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{1+x}\,dx$

d. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(2x)\,dx$

e. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

f. $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

g. $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt[3]{x^5}\,dx$

h. $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\,dx$

i. $\displaystyle\int_{0}^{-1/2} \cos(\pi x)\,dx$

7.6.6 Rita området, som begränsas av kurvorna $y = e^{2x}$ och $y = e^{3x}$ samt linjerna $x = -1$ och $x = 1$. Beräkna sedan arean av området.

7.6.7 Beräkna arean av området mellan funktionskurvorna $y = x^2 - 2x$ och $y = 6x - x^2$.

7.6.8 Beräkna arean av det begränsade området mellan funktionskurvorna $y = 1 - x^2$ och $x - 3y + 1 = 0$.

Facit

5.1.1 a. $2+5i$ b. $7-11i$
c. $-7-24i$ d. $1/2-1/2\,i$
e. $1/17+4/17\,i$ f. $-1/17+13/17\,i$
g. $61/170+23/170\,i$

5.1.2 a. $3\left(\cos(\frac{\pi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{2})\right)$ b. $\sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)$
c. $5\sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4})\right)$ d. $2\left(\cos(\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{3})\right)$
e. $2\left(\cos(\frac{4\pi}{3})+i\sin(\frac{4\pi}{3})\right)$

5.1.3 a. $-i$
b. -4
c. $1+\sqrt{3}i$

5.1.4 a. 16
b. $2^{10}\left(\cos(\frac{4\pi}{3})+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)=-2^9-2^9\sqrt{3}i$
c. $-4+4i$

5.2.1 a. $x_1=-1+i,\ x_2=-1-i$
b. $x_1=(-3+i\sqrt{11})/10,\ x_2=(-3-i\sqrt{11})/10$
c. $x_1=(3+i\sqrt{3})/6,\ x_2=(3-i\sqrt{3})/6$

5.2.2 a. $x_1=1+i,\ x_2=1-i,\ x_3=-1$
b. $x_1=1+i,\ x_2=1-i,\ x_3=(-1+i\sqrt{3})/2,\ x_4=(-1-i\sqrt{3})/2$

5.2.3 $x^4-8x^3+32x^2-80x+100$

5.2.4 a. $v=\pm\pi/3+n\cdot 2\pi,\ n\in\mathbb{Z}$
b. $v=\pi/12+n\cdot\pi,\ v=5\pi/12+n\cdot\pi,\ n\in\mathbb{Z}$
c. $v=\pi/2+n\cdot\pi,\ n\in\mathbb{Z}$
d. Saknar (reell) lösning
e. $v=1/3+\pi/2+n\cdot 2\pi/3,\ n\in\mathbb{Z}$

5.2.5 a. $v=\pi/6+n\cdot 2\pi/3,\ n\in\mathbb{Z}$
b. $v=n\cdot\pi,\ v=\pi/4+n\cdot\pi/2,\ n\in\mathbb{Z}$
c. $v=n\cdot\pi/2,\ n\in\mathbb{Z}$

5.2.6 a. $v=\pi/4+n\cdot\pi/2,\ n\in\mathbb{Z}$
b. $v=\pi/6+n\cdot 2\pi,\ v=5\pi/6+n\cdot 2\pi,\ v=\arcsin(1/3)+n\cdot 2\pi,$
$v=\pi-\arcsin(1/3),\ n\in\mathbb{Z}$
c. $v=\pi+n\cdot 2\pi,\ v=\pm\pi/3+n\cdot 2\pi,\ n\in\mathbb{Z}$
d. $v=n\cdot 2\pi,\ n\in\mathbb{Z}$
e. Saknar (reell) lösning

5.2.7 a. $x=6$ b. $x=3/2$ c. Saknar reell lösning
d. $x=0$ e. $x=3$

5.2.8 a. $x=0$ b. $x_1=0,\ x_2=1$ c. $x=-1$

5.2.9 a. $x = e^3$ b. $x = 1+4\sqrt{2}$ c. $x = 8$
d. $x = 3$ e. $x = \left(3-\sqrt{5}\right)/2$

5.2.10 a. $x_1 = 0$, $x_2 = -2$
b. $x_1 = 21/2$, $x_2 = -9/2$
c. $x = -4$

5.2.11 a. $x_1 = 5/2$, $x_2 = -3/2$
b. Alla x där $-1 \leq x \leq 2$
c. $x = \log_2 3 \approx 1.585$
d. $x = 1/\sqrt{2}$

5.3.1 a. $[-1/2, 1]$
b. $((-1-\sqrt{5})/2, (-1+\sqrt{5})/2)$
c. gäller ej för något x
d. alla reella $x \neq 1$
e. alla reella x sådana att $x \in (0,1)$ eller $x \in (2,\infty)$
f. alla reella x sådana att $x \in (-\infty, -1/2)$ eller $x \in (1/3, 3)$
g. alla reella x sådana att $x \in [-2,2)$ eller $x \in [3,\infty)$
h. $(-1, 2]$
i. $(\sqrt{2}, 2)$.

5.3.2 a. exempelvis $x^2 - x - 6 < 0$ b. exempelvis $x^2 - 7x + 10 \leq 0$
c. exempelvis $x^2 - 3x - 10 > 0$ d. exempelvis $x^2 - 5x + 6 \geq 0$

5.3.3 a. exempelvis $x^2 - x - 6 < 0$ b. exempelvis $(x+2)/(x-3) \leq 0$
c. exempelvis $(x-3)/(x+2) \leq 0$ d. exempelvis $x^2 - 7x + 10 \leq 0$
e. exempelvis $(x+2)/(x-5) \geq 0$ f. exempelvis $x^2 - 5x + 6 \geq 0$.

5.3.4 a. alla punkter under den räta linjen med ekvation $x - 3y = 0$
b. alla punkter på eller under den räta linjen med ekvation $2x + 3y = 4$
c. alla punkter utanför cirkelskivan med medelpunkt i origo och radie $2\sqrt{2}$ (den avgränsande cirkeln ingår heller inte)
d. alla punkter i cirkelringen mellan cirklarna med medelpunkt i origo och radier 1 och $\sqrt{5}$, samt punkterna på cirkeln med medelpunkt i origo och radie 1.

5.3.5 Likhet uppnås om och endast om $t = 1$.

5.3.6 I båda fallen den andre bilisten. Likhet uppnås om och endast om $a = b$.

5.3.7 a. 2
b. 4

6.1.1 a. 1 b. Saknas c. 0 d. 4
e. Saknas f. 3 g. Saknas h. $\pi/2$
i. $-\pi/2$

6.1.2 Om a är ett heltal så är $f(x) = a-1$ om x är aningen mindre än a och $f(x) = a$ om x är aningen större än a. I varje omgivning kring a finns det alltså olika x som ger både $a-1$ och a och därmed finns det inget gränsvärde.
Om a inte är ett heltal så finns det en omgivning till a som inte innehåller något heltal. Då kommer $f(x) = f(a)$ för alla x i den omgivningen, ty funktionen växlar bara värde när man kommer till ett heltal. Alltså existerar gränsvärdet och är lika med $f(a)$.

6.2.1 a. $1/3$ b. $3/5$ c. $1/5$
d. $11/7$ e. $-17/7$

6.2.2 a. $2/3$ b. -3 c. 0
d. $-2/7$ e. $-15/4$ f. Saknas

6.3.1 a. $x = 2$ och $y = 0$ b. $x = -2$ och $y = 1$
c. $x = -2$, $x = 2$ och $y = 0$ d. $x = -3$, $x = 2$ och $y = 0$
e. $x = -2$, $x = 1$ och $y = 1$ f. $y = 2$
g. $x = -2$ och $y = x-2$ h. $x = 2$ och $y = -(2x+5)/4$

6.3.2 Tips: Utför polynomdivision för att skriva om $f(x)$ som $p(x) + r(x)/n(x)$ där $r(x)$ har lägre grad än $n(x)$.

6.4.1 $[-2,-1]$, $[-1,0]$ och $[1,2]$.

6.4.2 $[\pi/2, 3\pi/4]$

6.4.3 a. $c = 3$
b. Omöjligt, varje värde gör f diskontinuerlig i punkten 0.

6.4.4 a. Ja, kontinuerlig i varje punkt i definitionsmängden.
b. Nej, diskontinuerlig i punkten 0.
c. Ja, kontinuerlig i varje punkt i definitionsmängden.

7.3.1 a. $15x^2-6$
b. $2x-2/x^3$
c. $2e^x+3\sin x$
d. $\sin x+x\cos x$
e. $2(3x^2\cos x-x^3\sin x)$
f. $3e^x(2x+1)/2\sqrt{x}$
g. $\sin x/\cos^2 x$
h. $-(2x^2+5)/(x\cdot(x^2+5\ln x)^2)$
i. $-1/(\sin x+\cos x)^2$
j. $(\sin x-x\cos x)/\sin^2 x$
k. $3/(x+2)^2$
l. $(2x-9x^2-x^4)/(x^3+1)^2$
m. $e^x(x\cdot\ln|x|-1)/(2x(\ln|x|)^2)$
n. $(x-1)/(2x\sqrt{x})$
o. $(-3x^4+4x^3+3x^2+6x-4)/(x^3+2x+1)^2$
p. $2^x(2x+x^2\cdot\ln 2)$
q. $3^x(x\cdot\ln 3-3)/x^4$
r. $x^3\cdot e^x(4\sin x+x\sin x+x\cos x)$
s. $((2+\ln x)(x^2+1)-4x^2\cdot\ln x)/(2\sqrt{x}(x^2+1)^2)$

7.3.2 a. $f'(\pi/4)=2$
b. $f'(1)=e$
c. $f'(-2)=-1/2$
d. $f'(4)=2+16(\ln 2)^2$.

7.3.3 a. $(e^{g(x)})'=e^{g(x)}\cdot g'(x)$
b. $(\sin(g(x)))'=\cos(g(x))\cdot g'(x)$
c. $(\cos(g(x)))'=-\sin(g(x))\cdot g'(x)$
d. $(\tan(g(x)))'=g'(x)/(\cos(g(x)))^2$
e. $\left((g(x))^n\right)'=n(g(x))^{n-1}\cdot g'(x)$
f. $(1/g(x))'=-g'(x)/(g(x))^2$.

7.3.4 a. $4e^{4x} - 2e^{1-2x}$
b. $3\cos(3x+1)$
c. $-2x \cdot \sin(x^2)$
d. $-2\sin x \cdot \cos x$ $(= -\sin 2x)$
e. $5e^x \cdot \cos(5e^x)$
f. $21/\big(2\sqrt{21x-1}\big)$
g. $6x^3/\sqrt{3x^4+7}$
h. $2(2x+5)(x^2+5x)$
i. $-12x^3(1-x^4)^2$
j. $7/(7x+3) - 1/(1-x)$
k. $(10x+3)/(5x^2+3x-4)$
l. $\Big((4x\sqrt{x}+1)/(2\sqrt{x})\Big) \cdot e^{x^2+\sqrt{x}}$
m. $1/\big(x \cdot \cos^2(\ln|x|)\big)$
n. $-1/\big(2\sqrt{x} \cdot \sin^2\sqrt{x}\big)$
o. $-\tan x$
p. $1/(\sin x \cdot \cos x)$
q. $2/(x^2-1)$
r. $6/(1-9x^2)$
s. $(3+2x-2x^2)/((2x-1)(x^2+x+1))$
t. $(7+8x-8x^2-70x^3-15x^4)/((3x^2+7x+1)(5x^3-x^2+1))$

7.3.5 a. $-3/5$
b. -3π
c. 9
d. 2
e. $-1, 1$
f. $7/2$

7.3.6 a. $2e^{x^2} \cdot \big(x\ln(2x+7) + 1/(2x+7)\big)$
b. $\big(\cos x^3 - 6x^3 \cdot \sin x^3\big)/(2\sqrt{x})$
c. $-\big(\cos(2-x) \cdot \cos 5x + 5\sin(2-x) \cdot \sin 5x\big)$
d. $e^{2x}\big(2(x^3+1) - \frac{3}{2}x^2\big)/\big(x^3+1\big)^{3/2}$

7.3.7 a. $29/4$
b. -2
c. $-(28+9\ln 2)/4$

7.3.8 a. $-6\sin 3x \cdot \cos 3x$ $(= -3\sin 6x)$
b. $2x \cdot \cos(x^2) \cdot e^{\sin x^2}$
c. $2x \cdot e^{x^2} \cdot \cos(e^{x^2})$
d. $2\sin x \cdot \cos x \cdot e^{\sin^2 x}$
e. $-2x/\big(\sin(1-x^2)\cos(1-x^2)\big)$
f. $-6xe^{3\sqrt{1-2x^2}}/\sqrt{1-2x^2}$
g. $\Big(2\sqrt{x}(e^{-\sqrt{x}}+1)\Big)^{-1}$

7.3.9 a. tangent: $12x - y = 16$, normal: $x + 12y = 98$
b. $x - 3y = 3 - 3\ln 3$, resp. $3x + y = 9 + \ln 3$
c. $y = 1$, resp. $x = 0$
d. $2x + y = 8$, resp. $x - 2y = 4$
e. $x + y = 0$, resp. $x - y = 2\pi$
f. $x - 5y - 3 = 0$, resp. $5x + y + 11 = 0$
g. $x + y + 1 = 0$, resp. $x - y + 1 = 0$
h. $19e \cdot x - 4y = 11e$, resp. $4x + 19e \cdot y = 4 + 38e^2$
i. $47x + 2y + 141 - 2\ln 2 = 0$, resp. $2x - 47y + 6 + 47\ln 2 = 0$.

7.5.1 $f''(2) = -(4+\sqrt{2})/16$.

7.5.2 a. $6x + 12/x^5$ b. $-2e^x \sin x$
c. $-(\ln x)/(4x\sqrt{x})$ d. $(2\sin x - x^2 \sin x - 2x\cos x)/x^3$.

7.5.3 a. $k = -5$ b. $k = -1$ eller $k = 2$
c. $k = -3, -2$ eller 1

7.5.4 a. $a = -1, b = \pm\sqrt{2}$ b. $a = -1, b = 0$ eller $a = 1, b = \pm 2$

7.5.5 a. minsta värde: $f(-2) = 1$ (även ett lokalt minimum); inget lokalt maximum
b. största värde: $f(2/3) = 10/3$ (även ett lokalt maximum); inget lokalt minimum
c. lokalt minimum: $f(-1) = 0$, lokalt maximum: $f(1) = 4$, inget minst eller störst värde
d. minsta värde: $f(-1) = -4$ (även ett lokalt minimum); inget lokalt maximum
e. största värde: $f(-1/2) = 19/8$ (även ett lokalt maximum), lokalt minimum: $f(1/2) = -13/8$, lokalt maximum: $f(1) = -1$
f. minsta värde: $f(-1/2) = 0$ (även ett lokalt minimum), lokalt maximum: $f(1) = 3$
g. största värde: $f(4) = 12$ (även ett lokalt maximum), minsta värde: $f(-2) = f(2) = 0$ (även ett lokalt minimum), lokalt maximum: $f(-3) = 5$ och $f(0) = 4$
h. minsta värde: $f(\ln 2) = 2 - 2\ln 2$ (även ett lokalt minimum)
i. minsta värde: $f(1+\sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}) - \ln 2$ (även ett lokalt minimum)
j. lokala maxima: $f(\pi/4 + n \cdot 2\pi) = e^{\pi/4+n\cdot 2\pi}/\sqrt{2}$, lokala minima: $f(5\pi/4 + n \cdot 2\pi) = -e^{5\pi/4+n\cdot 2\pi}/\sqrt{2}$
k. lokalt minimum: $f(0) = 1$, lokalt maximum: $f(1) = \sqrt{3/e}$
l. lokala minima: $f(1) = 0$ och $f(2) = 0$

7.6.1 a. $-2\cos x + \sin x + C$ b. $2\sqrt{x} + C$
c. $\ln|x| + e^x + C$ d. $10^x/\ln 10 + C$

7.6.2 a. $\sin(x+4) + C$ b. $2\sqrt{1+x} + C$
c. $e^{3x}/3 + C$ d. $\ln|x+5| + C$
e. $-\cos(2x)/2 + C$ f. $-\frac{2}{3}(1-x)^{3/2} + C$

7.6.3 a. $8\arctan x + \ln(1+x^2)/2 + C$ b. $\ln|1+x^3|/3 + C$
c. $\ln|\sin x| + C$ d. $-\ln|\cos x| + C$

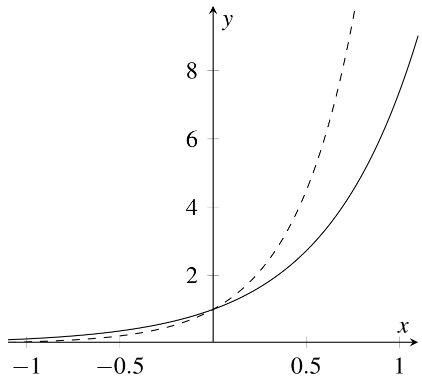
7.6.4 a. $1/2$ b. 0
c. $-1/2$ d. 0

7.6.5 a. $1/3$ b. 1
c. $\ln 2$ d. 0
e. 2 f. $\pi/3$
g. $3/8$ h. $-(1+2e-5e^2)/(2e^2)$
i. $-1/\pi$

7.6.6 Observera att e^{3x} är störst för positiva x och e^{2x} är störst för negativa x. Arean ges alltså av

$$\int_{-1}^{0} e^{2x} - e^{3x}\,dx + \int_{0}^{1} e^{3x} - e^{2x}\,dx\,.$$

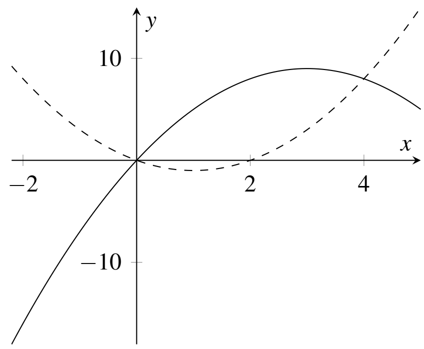
Svar: $1/3 + 1/(3e^3) - 1/(2e^2) - e^2/2 + e^3/3$



7.6.7 Observera att kurvorna skär varandra i origo och i punkten $(4,8)$ och att det är $6x - x^2$ som är störst i intervallet $(0,4)$. Arean ges alltså av

$$\int_{0}^{4} (6x - x^2) - (x^2 - 2x)\,dx\,.$$

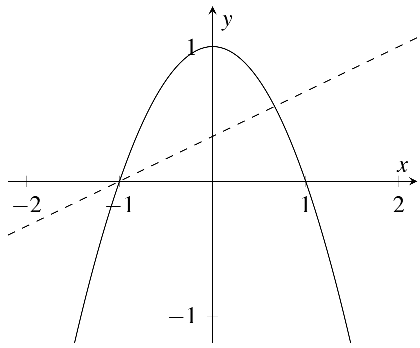
Svar: $64/3$



7.6.8 Observera att kurvorna skär varandra i punkterna $(-1,0)$ och $(2/3,5/9)$ och att det är $1-x^2$ som är störst i intervallet $(-1,2/3)$. Arean ges alltså av

$$\int_{-1}^{2/3} (1-x^2)-(x+1)/3\,dx\,.$$

Svar: $125/162$



Sakregister