Lösningar, Kombinatorik och geometri del 1, 7,5 poäng

Torsdag 11 juni 2015

1. Se kurslitteraturen.

2. (a) Streck i räkningen med 8 ettor och 2 streck ger antalet $\binom{10}{2} = 45$.

   (b) Först förser sig var och en med två kakor. Sen återstår det 2 kakor att fördela. Streck i räkningen med 2 ettor och 2 streck ger antalet $\binom{4}{2} = 6$.

3. Vi låter $x = |AM| = |BM|$ och $y = |AC|$. Pythagoras sats på trianglarna ΔAMC och ΔABC ger

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3^2 \\ (2x)^2 + y^2 = (2\sqrt{3})^2 \end{cases} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 & (1) \\ 4x^2 + y^2 = 12 & (2) \end{cases}.$$

   (2)-(1) ger $3x^2 = 3$ så $x = 1$. Stoppar vi in det i (1) får vi $y^2 = 9 - 1 = 8$ och $y = 2\sqrt{2}$. Så $|AB| = 2x = 2$ och $|AC| = y = 2\sqrt{2}$.

4. Vi låter E_i vara talen $1, 2, \ldots 300$ som är delbara med talet i. Vi skal beräkna antalet som inte är delbara med något av talen 2, 3 eller 5, dvs. $300 - \#E_2 \cup E_3 \cup E_5$. Inklusion-exklusion ger $\#E_2 \cup E_3 \cup E_5 = S_1 - S_2 + S_3 = \#E_2 + \#E_3 + \#E_5 - (\#E_2 \cap E_3 + \#E_2 \cap E_5 + \#E_3 \cap E_5) + \#E_2 \cap E_3 \cap E_5 = \#E_2 + \#E_3 + \#E_5 - (\#E_6 + \#E_{10} + E_{15}) + \#E_{30} = 150 + 100 + 60 - (50 + 30 + 20) + 10 = 220$. Alltså är talen som är relativt prima med 2, 3 och 5 80 stycken.

5. (a)

   1.Drag en stråle från en punkt A. Avsätt A_1, A_2 och A_3 på denna så att $|AA_1| = |A_1A_2| = |A_2A_3| = 1$. Speciellt blir då $|AA_2| = 2$.

   2. Konstruera mittpunktsnormalen N till A_1A_3. Den går genom A_2. Avsätt B på N så att $|A_2B| = 1$. Pythagoras sats på ΔAA_2B ger att $|AB|^2 = 2^2 + 1^2 = 5$ och alltså $|AB| = \sqrt{5}$ och AB är den sökta sträckan.

   (b)

   1. Vi utgår från sträckan AB från (a) och drar en stråle S från A. På denna avsätter vi S_1, S_2 och S_3 så att $|AS_1| = |S_1S_2| = |S_2S_3| = 1$.

   2. Drag S_3B. Konstruera en linje L parallell med S_3B genom S_1. Låt C vara skärningspunkten mellan L och AB.

3. AC är den sökta sträckan. Detta föjer eftersom $\Delta ACS_1 \sim \Delta ABS_3$ i skalan $1:3$ vilket ger $|AC| = \frac{1}{3}|AB| = \frac{1}{3}\sqrt{5}$.

6. (a) Svaret är $\dfrac{8!}{2!3!} = 3360$.

   (b) Vi delar in i fall.

   I. Högst ett E och högst ett R: Antalet 4-ord som kan bildas av $ERFIP$ är $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.

   II. Två E och högst ett R:

   Vi kan placera E på $\binom{4}{2} = 6$ sätt. Sen har vi två platser kvar att placera $RFIP$. Det går på $4 \cdot 3 = 12$ sätt. Så det finns $6 \cdot 12 = 72$ ord med två E och högst ett R.

   III. Två R och högst ett E:

   Som i II blir antalet 72.

   IV. Två E och två R: Vi kan placera E på $\binom{4}{2} = 6$ sätt. Sen måste de två R-en placeras på de två kvarvarande platserna. Så det finns 6 ord med två E och två R.

   V. Tre E:

   Dessa kan placeras på 4 sätt. På den sista platsen har vi 4 val. Så det finns $4 \cdot 4 = 16$ ord med tre E.

   Totalt finns det $120 + 2 \cdot 72 + 6 + 16 = 286$ ord.

7. Eftersom B och C är tangeringspunkter är $\wedge ABO = \wedge ACO = 90°$. Vidare är $|OB| = |OC| = r$ (r är cirkelns radie.) Pythagoras sats ger att $|AB| = |AC|$, så enligt SSS gäller att $\Delta ABO \cong ACO$. Så $\wedge BAO = \wedge CAO = 24°$. Eftersom vinkelsumman i ΔABO är $180°$ får vi $\wedge AOB = 90° - 24° = 66°$.

   Periferivinkelsatsen ger att $\wedge BDA = \frac{1}{2} \wedge BOA$. På samma sätt är $\wedge CDA = \frac{1}{2} \wedge COA = \frac{1}{2} \wedge BOA$. Detta ger $\wedge BDC = 2 \wedge BDA = \wedge BOA = 66°$.

8. Det minsta antalet är 7.

   För att se det bildar vi de sex ”lådorna” $L_1 = \{1, 12\}$, $L_2 = \{2, 11\}$, $L_3 = \{3, 10\}$, $L_4 = \{4, 9\}$, $L_5 = \{5, 8\}$ och $L_6 = \{6, 7\}$. När vi stoppar ner de 7 talen i dessa lådor kommer minst en låda att innehålla två tal. Summan av dessa är 13.

   Motexempel. Mängden $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ visar att 6 (eller färre) inte räcker eftersom summan av två tal i A är högst $5 + 6 = 11$.