Lösningar,
Kombinatorik och geometri del 1, 7,5 poäng

Tissdag 18 mars 2015,

1. Se kurslitteraturen.

2. Vi delar upp i två fall.

   I. Ord med högst ett M:

   Från alfabetet $SOMAR$ kan vi bilda $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ ord.

   II. Ord med två M:

   Vi placerar först ut två M vilket går på $\binom{4}{2} = 6$ sätt. Sen har vi kvar bokstäverna $SOAR$ att placer på två platser. Det går på $4 \cdot 3 = 12$ sätt. Så det finns $6 \cdot 12 = 72$ ord med två M.

   Det totala antalet ord blir $120 + 72 = 192$ stycken.

3. Låt $x = |BD|$. Bisektrissatsen ger

$$\frac{|BD|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|AC|} \text{ eller } 7|BD| = 5|CD| \ .$$

   Nu är $|CD| = |BC| - |BD| = 8 - x$ och vi får $7x = 40 - 5x$, $12x = 40$ och $x = \frac{40}{12} = \frac{10}{3}$. Så $|BD| = \frac{10}{3}$ och $|CD| = 8 - \frac{10}{3} = \frac{14}{3}$.

4. Låt b vara antalet blå, r antalet röda och v antalet vita kulor. Det sökta antalet är det samma som antalet heltalslösningar till ekvationen $b + r + v = 5$.

   (a) Eftersom det finns fler än 5 kulor av varje färg har vi inga villkor på b, r, v och streck i räkningen med 5 ettor och två streck, ger $\binom{7}{2} = 21$ sätt att dra kulorna.

   (b) Här har tryckfelsnisse varit framme.

   Det står MED hänsyn till ordningen. Jag hade tänkt UTAN hänsyn till ordningen och då kommer en lösning här. (Den som har gjort på detta sätt får OK för sin lösning.)

   Nu skall vi bestämma antalet lösningar till $b + r + v = 12$. Eftersom $6 < 12$ (men $18 > 12$) måste vi ta hänsyn till villkoret $b \leq 6$.

   Om vi struntar i detta villkor ger streck i räkningen med 12 ettor och två streck att det finns $\binom{14}{2} = 91$ sätt att dra kulorna.

Att villkoret *inte* är uppfyllt, betyder att $b > 6$ eller, eftersom b är heltal, att $b \geq 7$. Vi kan tänka på detta som att stoppa ägg i tre korgar och minst 7 ägg i den första korgen. Lägger vi 7 ägg i den första korgen har vi 5 ägg kvar att fördela. Enligt (a) är detta antal 21. Så det sökta antalet är $91 - 21 = 70$.

En lösning till fallet MED hänsyn till ordningen kommer här. (Har du behandlat detta fall får du självklart också OK för din lösning.)

Vi delar upp i fall efter antal blå kulor. Med k blå kulor,$k = 0, 1, 2, \ldots, 6$ har vi $\binom{12}{k}$ att välja i vilken ordning dessa blå kommer. Sen skall de övriga $12 - k$ röda eller vita kulorna väljas. Vi har 2 val varje gång så det blir 2^k möjligheter. Så totalt blir det $\binom{12}{k}2^k$ möjligheter.

Adderar vi nu dessa fall får vi att det sökta antalet är

$$\binom{12}{0}2^{12} + \binom{12}{1}2^{11} + \cdots \binom{12}{5}2^7 + \binom{12}{6}2^6 = 496128 \ .$$

(För det numeriska värdet har datorn hjälpt till.)

5. Kordasatsen ger $|AP||BP| = |CP||DP|$ dvs. $6|BP| = 24$. Så $|BP| = 4$ och $|AB| = |AP| + |BP| = 6 + 4 = 10$.

   Eftersom $\wedge ACB$ är rät är AB en diameter. Diametern har alltså längden 10 och därmed har radien längden 5.

6. Låt M_n vara de tal mellan 1 och 600 som är delbara med n. Antalet sådana tal, $\#M_n$, är (heltalsdelen av) $600/n$. Så t.ex. är $\#M_5 = 120$ och $\#M_6 = 100$.

   (a) Vi beräknar komplementet. Att n inte uppfyller villkoret betyder att n är delbart med 5 eller 6 (eller båda). Så talen som är delbara med något av 5 eller 6 är $M_5 \cup M_6$. Nu gäller

   $$\#(M_5 \cup M_6) = \#M_5 + \#M_6 - \#(M_5 \cap M_6) =$$

   $$= \#M_5 + \#M_6 - \#M_{30} = 120 + 100 - 20 = 200 \ .$$

   Så antalet tal som *inte* är delbara med 3 eller 5 är $600 - 200 = 400$.

   (b) Att vara delbart med något av talen 3, 5 eller 6 är detsamma som att vara delbart med 3 eller 5. (Är ett tal delbart med 6 är det ju delbart med 3.) På samma sätt som i (a) får vi

   $$\#(M_3 \cup M_5) = \#M_3 + \#M_5 - \#(M_3 \cap M_5) =$$

   $$= \#M_3 + \#M_5 - \#M_{15} = 200 + 120 - 40 = 280 \ .$$

Så antalet tal som *inte* är delbara med 3, 5 eller 6 är $600 - 280 = 320$.

7. (a)

   1. Konstrurera en liksidig triangel ΔABC. Vinklarna är alla $60°$.

   2. Konstruera mittpunkten M på BC (genom att konstruera en mittpunktsnormal).

   3. Eftersom mittpunktsnormalen i en likbent triangel är en bisektris blir $\wedge BAM = 30°$.

(b)

Analys. *Om* vi har lyckats med konstruktionen gäller att trianglarna ΔATC och ΔAMT är likbenta. ($|AT| = |TC|$ enligt förutsättningen och AM och MT är radier i cirkeln.) Så $\wedge TAB = \wedge ATM = \wedge ACT = \alpha$. Eftersom CT är en tangent gäller $\wedge MTC$ är rät. För vinkelsumman i triangeln ATC gäller $\alpha + \alpha + 90 + \alpha = 180$ vilket ger $\alpha = 30°$.

Konstruktion.

1. Konstruera T enligt (a) så att $\wedge BAT = 30°$.

2. Drag en normal n till MT genom T.

3. Låt C vara skärningen mellan n och förlängningen av AB.

4. T och C är de sökta punkterna.

Bevis.

Från analysen ovan följer att $\wedge ACT = \wedge TAC$ och enligt omvändningen till basvinkelsatsen får vi $|AT| = |TC|$.

Det återstår att visa att TC är en tangent. Det följer om vi kan visa att $\wedge MTC$ är rät. För vinkelsumman i triangeln ATC gäller $30 + 30 + \wedge MTC + 30 = 180$ vilket ger $\wedge MTC = 90$.

8. Vi delar upp i två fall.

I. De tal som börjar med 1, 2 eller 3.

Första siffran kan väljas på 3 sätt. Sen skall de kvarvarande två siffrorna av 1, 2 och 3 placeras på tre platser. Det går på $3 \cdot 2 = 6$ sätt. Till sist skall den fjärde siffran väljas. Det går på 7 sätt. Så det finns $3 \cdot 6 \cdot 7 = 126$ sådana tal.

II. De tal som inte börjar med 1, 2 eller 3.

Första siffran kan väljas på 2 sätt. Sen skall 1, 2 och 3 placeras på tre platser. Det går på $3! = 6$ sätt. Så det finns $2 \cdot 6 = 12$ sådana tal.

Alltså finns det $126 + 12 = 138$ tal med precis en etta, en tvåa och en trea.