# Lösningar, Kombinatorik och geometri del 1, 7,5 poäng

Torsdag 19 mars 2015,

1. Se kurslitteraturen.

2. (a) Eftersom det finns tre dubbletter blir antalet $\dfrac{12!}{2^3}$.

   (b) Vi delar upp i två fall.

   Fall 1. Ingen dubblett. Nu skall vi bilda 3-ord av 9 bokstäver vilket går på $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ sätt.

   Fall2. En dubblett. Dubletten kan väljas på 3 sätt och placeras på 3 sätt. Sen har vi 8 bokstäver kvar att placera på den sista platsen. Så antalet blir $3 \cdot 3 \cdot 8 = 72$.

   Totalt får vi $504 + 72 = 576$ 3-ord.

3. Halva omkretsen är $p = \dfrac{1}{2}(4+5+6) = \dfrac{15}{2}$. Så Herons formel ger, om $|T|$ är triangelarean, att

$$|T|^2 = \frac{15}{2}(\frac{15}{2} - 6)(\frac{15}{2} - 5)(\frac{15}{2} - 4) =$$

$$= \frac{15(15-12)(15-10)(15-8)}{2^4} = \frac{15 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{4^2} = \left(\frac{15}{4}\right)^2 \cdot 7 \ .$$

   Så $|T| = \frac{15}{4}\sqrt{7}$.

   Men vi har också $|T| = \frac{1}{2} \cdot 5h$. Detta ger $h = \frac{2}{5}\frac{15}{4}\sqrt{7}$ och $h = \frac{3}{2}\sqrt{7}$.

4. (a) Ett utfall bestäms av hur många blå, röda och vita kulor vi drar. Om dessa antal är $k, l, m$ skall vi bestämma antalet heltalslösningar till

$$k + l + m = 5 \ .$$

   Streck i räkningen med 5 ettor och 2 streck ger att antalet är $\binom{7}{2} = 21$.

   (b) Den första kulan kan dras på 3 sätt, den andra också på 3 sätt osv. Så antalet blir $3^5 = 243$.

5. (a) Låt vinkeln ha hörn i en punkt $P$.

   1. Drag en cirkel med medelpunkt i $P$ och radie 1. Den skär vinkelbenen i $Q$ och $R$. (Så vi har en triangel $\Delta PQR$ med $\wedge QPR = u$.)

   2. Drag en cirkel med medelpunkt i $A$ och radie 1. Den skär sträckan $AB$ i $B'$.

3. Drag en cirkel med medelpunkt i $B'$ och radie $|QR|$.

4. De två cirklarna skär varandra i $C$. Då är $\Delta QPR \cong \Delta AB'C$. Speciellt är $\wedge CAB = \wedge CAB' = \wedge QPR = u$ så $C$ är den sökta punkten.

(b)

1. Flytta vinkeln som i (a) så att $\wedge C'AB = u$.
2. Flytta vinkeln som i (a) så att $\wedge C'AD = v$.
3. Låt $B'$ ligga på linjen $AB$ så att $A$ ligger mellan $B$ och $B'$.
4. Nu är $w = \wedge B'AD = 180 - u - v$.
5. Flytta vinkeln som i (a) så att $\wedge ABC'' = w$.
6. Låt $C$ vara skärningen mellan strålarna $AC'$ och $BC''$.
7. $\Delta ABC$ är den sökta triangeln.

6. Låt $E_k = \{1 \leq n \leq 700; k\Big|n\}$. Vi skall beräkna $\#E_2 \cup E_5 \cup E_7$. Inklusion-exclusion ger $\#E_2 \cup E_5 \cup E_7 = S_1 - S_2 + S_3$. Här är

$$S_1 = \#E_2 + \#E_5 + \#E_7 = 350 + 140 + 100 = 590 \ ,$$

$$S_2 = \#E_2 \cap E_5 + \#E_2 \cap E_7 + \#E_5 \cap E_7 = \#E_{10} + \#E_{14} + \#E_{35} = 70 + 50 + 20 = 140 \ ,$$

och

$$S_3 = \#E_2 \cap E_5 \cap E_7 = \#E_{70} = 10; .$$

Så det sökta antalet är $590 - 140 + 10 = 460$.

7. (a) Kordasatsen; $|AP||BP| = |CP||DP|$; ger $6|AP| = 10 \cdot 4$. Så $|AP| = \frac{20}{3}$. Detta ger $|AB| = |AP| - |BP| = \frac{20}{3} - 6 = \frac{2}{3}$.

(b) Cossinussatsen på $\Delta PBC$ ger $6^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cos P$. Så $120 \cos P = 100$ och $\cos P = \frac{5}{6}$.

Cossinussatsen på $\Delta ACP$ ger $|AC|^2 = 10^2 + \left(\frac{20}{3}\right)^2 - 2 \cdot 10 \cdot \frac{20}{3} \cdot \frac{5}{6} = 10^2(1 + \frac{4}{9} - \frac{10}{9}) = 10^2 \cdot \frac{9+4-10}{9} = 10^2 \cdot \frac{1}{3}$. Så $|AC| = \frac{10}{\sqrt{3}}$.

8. (a) Entalssiffran kan väljas på 5 sätt, tusentalssiffran på 8 sätt (inte entalssiffran och inte 0), hundratalssiffran på 8 sätt (inte en- eller tusentalssiffran), och tiotalssiffran på 7 sätt (inte någon av de tre redan valda). Så antalet sökta tal blir $5 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 = 2240$.

(b) Vi betraktar komplementet, dvs. alla tal som inte innehåller siffran 7. Vi resonerar som i (a), de fyra talen $5, 8, 8, 7$ minskar alla med ett eftersom 7 inte är med. Så det finns $4 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6$ tal som inte innehåller 7. Så antalet som innehåller 7 är $5 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 - 4 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 = 8 \cdot 7(5 \cdot 8 - 7 \cdot 3) = 56 \cdot 19 = 1064$.