Förslag till lösningar,
Kombinatorik och geometri del 1, 7,5 poäng

Torsdag 17 mars 2015

1. Se kurslitteraturen.

2. (a) Eftersom det finns två dubbletter blir antalet $\dfrac{7!}{2^2} = 1260$.

   (b) Vi delar upp i tre fall.

   Fall 1. Ingen dubblett. Nu skall vi bilda 4-ord av 5 bokstäver vilket går på $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ sätt.

   Fall 2. En dubblett. Dubletten kan väljas på 2 sätt och placeras på $\binom{4}{2} = 6$ sätt. Sen har vi 4 bokstäver kvar att placera på de två sista platserna vilket går på $4 \cdot 3 = 12$ sätt. Så antalet blir $2 \cdot 6 \cdot 12 = 144$.

   Fall 3. Två dubbletter. Två A kan placeras på $\binom{4}{2} = 6$ sätt och sen måste vi ha S på de sista två platserna. Så det finns 6 ord med två dubbletter.

   Totalt får vi $120 + 144 + 6 = 270$ ord.

3. Halva omkretsen är $p = \dfrac{1}{2}(4+5+7) = 8$. Så Herons formel ger, om $|T|$ är triangelarean, att $|T|^2 = 8(8-7)(8-5)(8-4) = 4^2 \cdot 6$. Så $|T| = 2\sqrt{6}$.

   Men vi har också $|T| = \dfrac{1}{2} \cdot 7h$.

   Detta ger $h = \dfrac{8}{7}\sqrt{6}$.

4. Vi börjar med att ge varje barn 2 kolor. Sedan har vi $17 - 10 = 7$ kolor att fördela på fem barn. Streck i räkningen med 7 ettor och 4 streck ger antalet

$$\binom{11}{4} = \cdots = 330\ .$$

5. Vi vet att om diagonalerna i en fyrhörning delar varandra mitt itu är fyrhörningen en parallellogram. Så vi gör en konstruktion där detta blir uppfyllt.

   1. Låt $|AB| = 8$ och konstruera en mittpunktsnormal till AB. Kalla mittpunkten för M. (Alternativt kan vi använda sträckan av längd 4 för att bestämma M.)

   2. Dela sträckan av längd 6 på mitten (igen genom att konstruera en mittpunktsnormal) för att få en sträcka av längd 3.

   3. Drag en cirkel $\mathcal{C}_1$ med centrum i M och radie 3.

   4. Drag en cirkel $\mathcal{C}_2$ med centrum i A genom M (så radien blir 4). Låt en av skärningspunkterna mellan $\mathcal{C}_1$ och $\mathcal{C}_2$ vara C.

   5. Drag linjen genom C och M. Den skär $\mathcal{C}_1$ (förutom i C) i en punkt D.

   6. $ACBD$ är den sökta fyrhörningen.

6. Vi beräknar först antalet tal som *är* delbara med något av talen 2, 5 eller 9?

   Låt $E_k = \{1 \leq n \leq 10000; k \Big| n\}$. Inklusion-exklusion ger $\#E_2 \cup E_5 \cup E_9 = S_1 - S_2 + S_3$. Här är

$$S_1 = \#E_2 + \#E_5 + \#E_9 = 500 + 200 + 111 = 811 \ ,$$

$$S_2 = \#E_2 \cap E_5 + \#E_2 \cap E_9 + \#E_5 \cap E_9 =$$
$$\#E_{10} + \#E_{18} + \#E_{45} = 100 + 55 + 22 = 177 \ ,$$

   och

$$S_3 = \#E_2 \cap E_5 \cap E_9 = \#E_{90} = 11 \ .$$

   Så $\#E_2 \cup E_5 \cup E_9 = 811 - 177 + 11 = 645$.

   Antalet som *inte* är delbara med något av talen 2, 5 eller 9 är $1000 - 645 = 355$.

7. Pythagoras sats ger $|AC|^2 = 5^2 + 12^2 = 169$ och $|AC| = \sqrt{169} = 13$.

   Trianglarna ΔABC och ΔDEC har båda en rät vinkel och vinkeln $\wedge C$ är gemensam. Så enligt (VVV) gäller $\Delta ABC \sim \Delta DEC$. Detta ger

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|DE|}{|EB|} \quad \text{eller} \quad \frac{5}{13} = \frac{3}{|EB|} \ .$$

   Så $|EB| = \dfrac{3 \cdot 13}{5} = \dfrac{39}{5}$ och $|CE| = 12 - \dfrac{39}{5} = \dfrac{21}{5}$.

8. Vi delar upp i fall.

   I. Med precis två ettor.
   Ettorna, som måste stå intill varandra, kan placeras på 4 sätt. Sedan finns det tre platser kvar att placera siffrorna 2 eller 3.
   Så det finns $4 \cdot 2^3 = 32$ tal med två ettor.

   II. Med precis tre ettor.
   i) Om alla ettorna står intill varandra kan de placeras på 3 sätt. Sedan finns det två platser kvar att placera siffrorna 2 eller 3. Så det finns $3 \cdot 2^2$ sådana tal.
   ii) Om de tre ettorna inte står intill varandra kan de placeras på följande 6 sätt:

$$11*1*, \quad 11**1, \quad *11*1, \quad 1*11*, \quad 1**11, \quad *1*11,$$

   där $*$ står för 2 eller 3. Så det finns $6 \cdot 2^2$ sådana tal.
   Det finns alltså $3 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2^2 = 9 \cdot 2^2 = 36$ tal med tre ettor.

   III. Med precis fyra ettor.
   Dessa kommer automatiskt att ha två ettor intill varandra. Ettorna kan placeras på 5 sätt (Det finns 5 sätt att placera ”icke-ettan”.) och sedan har vi 2 val för den sista siffran.
   Så det finns $5 \cdot 2 = 10$ tal med fyra ettor.

   IV. Det finns 1 tal med fem ettor.

   Så totalt finns det $32+36+10+1 = 79$ tal med två ettor intill varandra.