Förslag till lösningar,
Kombinatorik och geometri del 1, 7,5 poäng

Torsdag 9 juni 2016

1. Se kurslitteraturen.

2. (a) Vi skall välja 4 personer från 12, vilket går på $\binom{12}{4} = 495$ sätt.

   (b) Vi delar upp i två fall.

   I. Varken Laura eller Hasse är med. Nu skall vi välja 4 från 10. Så antalet blir $\binom{10}{4} = 210$.

   II. Precis en av Laura eller Hasse är med. Vi har 2 val av Laura eller Hasse. Sen skall vi välja ytterligar 3 från 10. Så antalet blir $2\binom{10}{3} = 2 \cdot 120 = 240$.

   Antalet kommittéer blir alltså $210 + 240 = 450$ stycken.

   Anmärkning. Ett annat (och enklare) sätt att lösa (b) är att ta alla 495 kommitéerna och dra bort de där både Laura och Hasse är med. Dessa är $\binom{10}{2} = 45$. Så svaret blir $495 - 45 = 450$.

3. Kordasatsen ger $|AP||BP| = |CP||DP|$. Låt $x = |CP|$ Då är $|DP| = 11 - x$. Vi får ekvationen $x(11 - x) = 4 \cdot 6 = 24$ med rötterna $x = 3$ och $x = 8$. Så $=|CP|$ och $|DP|$ är 3 respektive 8 (eller tvärtom).

   (b)

4. (a) Streck i räkningen med 12 ettor och 3 streck ger antalet $\binom{15}{3} = \cdots = 455$.

   (b) Att villkoret inte är uppfyllt betyder att det första kakmonstret skall få minst 4 kakor. Först ger vi det första kakmonstret dessa fyra kakor. Sen har vi 8 kakor att fördela. Streck i räkningen med 8 ettor och 3 streck ger antalet $\binom{11}{3} = \cdots = 165$. Det sökta antalet blir $455 - 165 = 290$.

5. (a) Med hjälp av passare (och enhetssträckan) konstruerar vi punkter A, P_1, P_2,B och P (i denna ordning) på en stråle så att $|AP_1| = |P_1P_2| = |P_2B| = 1$ och $|BP| = 3$. Alltså är $|AB| = 3$. Konstruera mittpunktsnormalen BC till AP med $|BC| = 1$. Pythagoras sats ger att $|AC| = \sqrt{10}$.

   (b) Konstruera mittpunktsnormalen P_1D till AP_2. Den skär AC i D. Likformighet ger

$$\frac{|AD|}{|AP_1|} = \frac{|AC|}{|AB|} \text{ dvs. } |AD| = \frac{1}{3}\sqrt{10}\,.$$

6. (a) Vi delar upp i fall:

Röda kulor:	i) ≤ 1	ii) 2
Vita kulor:	a) ≤ 1	b) 2

   Fall i)a): Vi väljer 3 kulor från 5 utan hänsyn till ordningen. Det går på $\binom{5}{3} = 10$ sätt.

   Fall i)b): Förutom de två vita kulorna skall vi välja ytterligare 1 från de övriga fyra färgerna. Så det går på 4 sätt.

   Fall ii)a) ger på samma sätt 4 möjligheter.

   Fall ii)b) går inte.

   Så totalt finns det $10 + 2 \cdot 4 = 18$ möjligheter.

   (b) Vi delar upp i samma fall, och för varje mängd i (a) ordnar vi den.

   I Fall i)a) har vi 10 fall med 3 olikfärgade kulor. Dessa kan ordnas på $3! = 6$ sätt. Så vi har $10 \cdot 6 = 60$ möjligheter.

   I Fall ii)a) har vi 4 fall med 2 kulor av en viss färg och en tredje med en annan färg. Dessa kan ordnas på 3 sätt. Så vi får $4 \cdot 3 = 12$ möjligheter.

   På samma sätt får vi 12 möjligheter i Fall ii)a).

   Så totalt finns det $60 + 2 \cdot 12 = 84$ möjligheter.

7. Låt $|AB| = x$ och $|BD| = y$. Bisektrissatsen med avseende på bisektrisen AD ger $\dfrac{|BD|}{|AB|} = \dfrac{|DC|}{|AC|}$ eller $\dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$. Så $x = 2y$.

   Bisektrissatsen med avseende på bisektrisen BE ger $\dfrac{|EC|}{|BC|} = \dfrac{|AE|}{|AB|}$ eller $\dfrac{4}{y+5} = \dfrac{6}{x}$, $6y + 30 = 4x = 8y$ och $x = 2y = 30$ Så $|AB| = 30$ och $|BD| = 15$.

8. Låt $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, 49999\}$. Vi har $\#\Omega = 5000$. Att villkoret inte är uppfyllt betyder att talet saknar siffran 1, 2 eller 3. Låt U_i vara de tal som saknar siffran i, U_{ij} de som saknar siffran i och j samt U_{ijk} de som saknar siffrorna i, j och k. Att villkoret inte är uppfyllt betyder att talet ligger i $U_1 \cup U_2 \cup U_3$. Inklusion-exklusion ger

   $$\#(U_1 \cup U_2 \cup U_3) = \#U_1 + \#U_2 + \#U_3 - (\#U_{12} + \#U_{13} + \#U_{23}) + \#U_{123}\ .$$

   Nu gäller $\#U_i = 4 \cdot 9^3$, $\#U_{ij} = 3 \cdot 8^3$ och $\#U_{ijk} = 2 \cdot 7^3$. Så $\#(U_1 \cup U_2 \cup U_3) = 3 \cdot 4 \cdot 9^3 - 3 \cdot 3 \cdot 8^3 + 2 \cdot 7^3 = 4826$. Det sökta antalet är alltså $5000 - 4826 = 174$.