Förslag till lösningar,
Kombinatorik och geometri del 1, 7,5 poäng

Tisdag 16 augusti 2016

1. Se kurslitteraturen.

2. (a) Vi delar upp i fall.

   Fall 1. Utan dubblett. Nu skall vi bilda 3-ord av 3 bokstäver vilket går på $3! = 6$ sätt.

   Fall 2. En dubblett. Dubletten kan väljas på 2 sätt och placeras på $\binom{3}{2} = 3$ sätt. Sen har vi 2 bokstäver kvar att placera på den sista platsen vilket går på 2 sätt. Så antalet blir $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$.

   Fall 3. Med två dubbletter går inte.

   Totalt får vi $6 + 12 = 18$ ord.

   (b) Vi delar upp i samma fall.

   Fall 1. Utan dubblett går inte.

   Fall 2. En dubblett. Dubletten kan väljas på 2 sätt och placeras på $\binom{4}{2} = 6$ sätt. Sen har vi 2 bokstäver kvar att placera på de sista två platserna vilket går på 2 sätt. Så antalet blir $2 \cdot 6 \cdot 2 = 24$.

   Fall 3. Med två dubbletter. A kan placeras på $\binom{4}{2} = 6$ sätt. Sen är platserna för D bestämda. Så det finns 6 ord.

   Totalt får vi $24 + 6 = 30$ ord.

   Ett enklare sätt att lösa (b) är att använda att antalet fyrord är samma som antalet femord vilket är $\frac{5!}{2!^2} = 30$.

3. (a) Bisektrissatsen ger

$$\frac{|BD|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|AC|} \text{ dvs. } |BD| = \frac{|CD|}{|AC|}|AB| = 4\ .$$

Så $|BC| = |BD| + |DC| = 10$.

(b) Halva omkretsen är $p = \frac{1}{2}(8+12+10) = 15$. Så Herons formel ger, om $|T|$ är triangelarean, att $|T|^2 = 15(15-12)(15-10)(15-8) = 15^2 \cdot 7$. Så $|T| = 15\sqrt{7}$.

4. Ida, Per och Sara börjar med att ta 2 chokladbitar var. Sedan skall de dela på de 9 kvarvarande chokladbitarna. Streck i räkningen med 9 ettor och 2 streck ger att de kan göra det på $\binom{11}{2} = 55$ sätt.

5. Vi vet att om diagonalerna i en fyrhörning delar varandra mitt itu är fyrhörningen en parallellogram. Så vi gör en konstruktion där detta blir uppfyllt.

   1. Genom att konstruera en mittpunktsnormal kan vi halvera sträckorna med längd 8 och 10 och få sträckor med längd 4 och 5. (Vi har redan en sträcka med längd 5 så vi behöver inte halvera sträckan med längd 10.)

   2. Låt AB vara en sträcka med längden 5.

   3. Drag en cirkel med centrum i A och radien 4 samt en cirkel med centrum i B och radien 5. Låt M vara en skärningspunkt mellan cirklarna.

   4. Förläng strålen AM till AC med längden 8 (så M är mittpunkt på AC) och förläng strålen BM till BD med längden 10 (så M är mittpunkt på BD).

   5. $ABCD$ är den sökta fyrhörningen.

6. Vi beräknar först antalet tal som *är* delbara med något av talen 3, 5 eller 7.

   Låt $E_k = \{1 \leq n \leq 950; k \big| n\}$. De tal som är delbara med något av talen 3, 5 eller 7 är $E_2 \cup E_5 \cup E_9$. Inklusion-exklusion ger $\#E_2 \cup E_5 \cup E_9 = S_1 - S_2 + S_3$. Här är

$$S_1 = \#E_3 + \#E_5 + \#E_7 = 316 + 190 + 135 = 641 \ ,$$

$$S_2 = \#E_3 \cap E_5 + \#E_3 \cap E_7 + \#E_5 \cap E_7 =$$
$$\#E_{15} + \#E_{21} + \#E_{35} = 63 + 45 + 27 = 135 \ ,$$

och

$$S_3 = \#E_3 \cap E_5 \cap E_7 = \#E_{105} = 9\ .$$

Så $\#E_2 \cup E_5 \cup E_9 = 641 - 135 + 9 = 515$.

Det sökta antalet är $950 - 515 = 435$.

7. Låt m och M vara den lilla respektive den stora cirkelns medelpunkter. Låt också t och T vara tangeringspunktena på den lilla respektive den stora cirkeln. Låt slutligen P vara skärningspunkten mellan förlängningen av mM och tT.

   Eftersom tangenten till en cirkel är vinkelrät mot radien bildar ΔPtm och ΔPTM två rätvinkliga trianglar. Så tm är parallell med TM och enligt topptriangelsatsen är ΔPtm och ΔPTM likformiga.

   Likformigheten ger $\dfrac{|Pm|}{4} = \dfrac{|Pm| + 12}{6}$. Detta ger $6|Pm| = 4|Pm| + 48$ och $|Pm| = 24 = 4 \cdot 6$.

   Pythagoras sats på ΔPtm ger $|Pt|^2 + 4^2 = 24^2$, $|Pt|^2 = 4^2(6^2 - 1)$ och $|Pt| = 4\sqrt{35}$.

   Slutligen ger likformighet igen att $\sqrt{35} = \dfrac{4\sqrt{35}}{4} = \dfrac{4\sqrt{35} + |tT|}{6}$. Så det sökta avståndet är $|tT| = 6\sqrt{35} - 4\sqrt{35} = 2\sqrt{35}$.

8. Vi delar upp i fall efter antal ettor.

   0. Sökta tal utan ettor är 3^5

   1. Sökta tal med 1 etta är $5 \cdot 3^4$

   2. Sökta tal med 2 ettor. Om vi struntar i villkoret om att ettorna inte får stå brevid varandra kan 2 ettor placeras på $\binom{5}{2} = 10$ sätt. Av dessa har 4 två ettor intill varandra. Så antalet godkända sätt att placera 2 ettor är $10 - 4 = 6$. Sen har vi 3^3 val för de sista 3 platserna. Så det finns $6 \cdot 3^3$ sökta tal med 2 ettor.

   3. Sökta tal med 3 ettor. Ettorna måste stå på plats 1, 3 och 5. Sen har vi 3^2 val för de sista 2 platserna. Så det finns 3^2 sökta tal med 2 ettor.

   4&5. Det finns inga tal med 4 eller 5 ettor utan intilliggande ettor.

   Totalt finns det alltså $3^5 + 5 \cdot 3^4 + 6 \cdot 3^3 + 3^2 = 819$ sökta tal.