LGMA10 / L9MA10

Omtenta 2017-06-07

lösningsförslag

P-1 T T T för alla fyra.
i 60-bas kan T representera 1, 60, 3600 beroende på position men eftersom man skriver tal upp till 9 med antalet T så kan den också användas för 3, a.n.

P-2 $x^5 + x^6 + x^7 + \dots + x^{100} = \sum_{i=5}^{100} x^i$

P-3 $\sqrt{28 + 10\sqrt{3}} = \sqrt{(5+\sqrt{3})^2} = |5 + \sqrt{3}|$

P-4 $\dfrac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \dfrac{(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2}{(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})} = \dfrac{5 + 2 - 2\sqrt{10}}{5 - 2} = \dfrac{7 - 2\sqrt{10}}{3}$

Anonym kod	Tentamen LGMA10/L9MA10	sid.nummer 1	Poäng

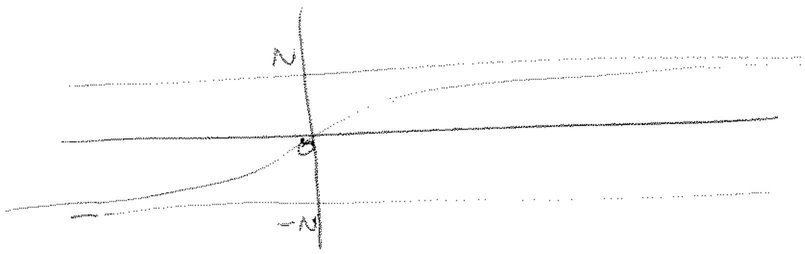
G-1 Till nedanstående uppgifter skall svar anges på anvisad plats

a) Förklara följande villkor och skissa en växande funktion f som uppfyller villkoret

$$\exists N, \forall x, |f(x)| < N$$

(2p)

Svar: f är begränsad: det finns en gräns N och alla f(x) ligger mellan −N och N



b) Ange (2p)

- ett exempel på ett polynom av grad 4 med bara två reella nollställen

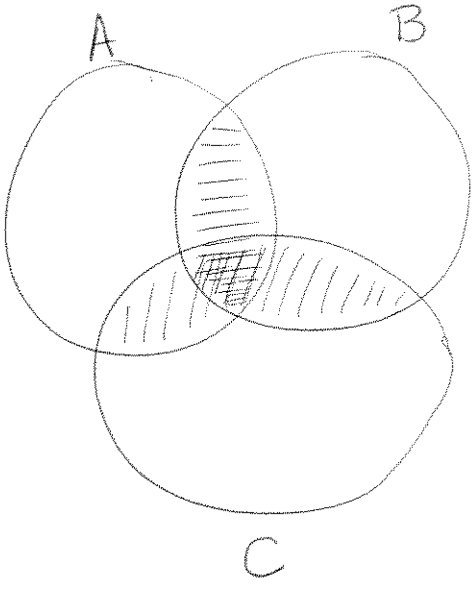
  $P(x) = x(x-1)(x^2+1)$

- ett exempel på ett polynom med nöllställe vid 0, 1, 2 och 3.

  $Q(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$

c) För tre mängder A, B, C, illustrera mängden $((A \cup B) \cap C) \cap (A \cap B)$ och uttryck samma mängd på ett enklare sätt. (2p)

Svar:



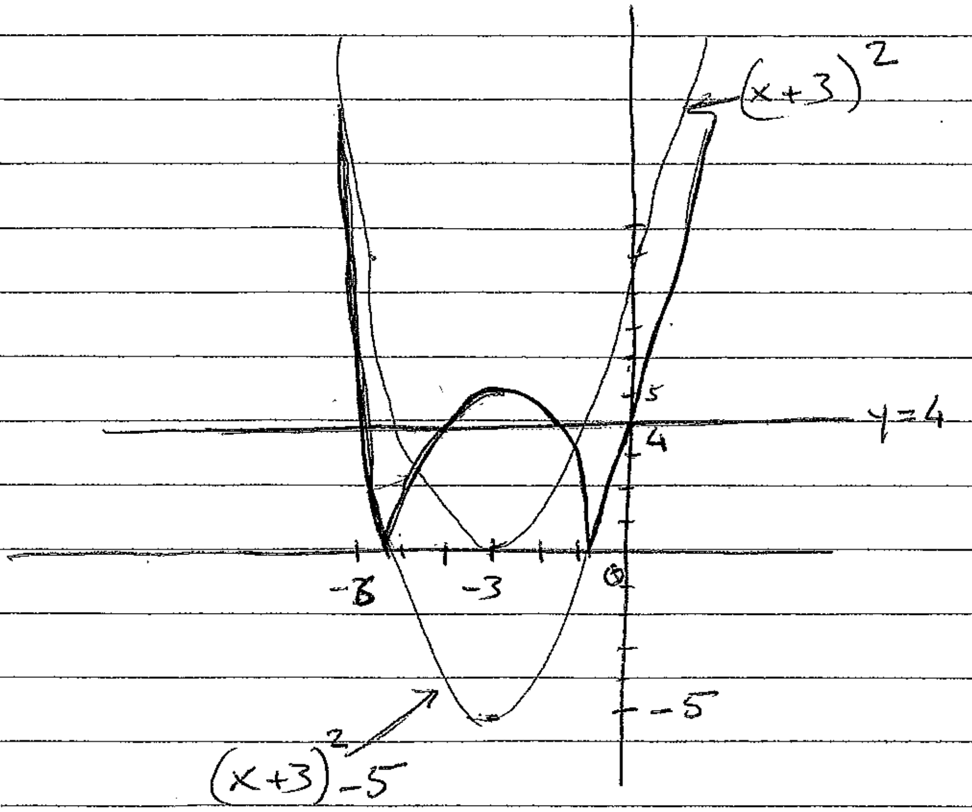
≡ : $A \cap B$

/// : $(A \cup B) \cap C$

vår mängd: $A \cap B \cap C$ #

G 2 : $x^2+6x+4 = (x+3)^2 - 9 + 4$
$= (x+3)^2 - 5$

Jag skissar på parabeln $(x+3)^2$ dvs x^2 förskuten mot vänster 3 steg, och förskuten ner 5 steg.



Jag tar sedan absolutbeloppet genom att spegla i x-axeln den del som låg under axeln.

Olikheten $f(x) \leq 4$ löser jag med hjälp av grafen och beräknar gränspunkter där $f(x) = 4$.

$f(x) = 4$ om $x^2+6x+4 \geq 0$ och $x^2+6x+4 = 4$
dvs $x^2+6x = 0$, dvs $x=0$ eller $x=-6$
eller $x^2+6x+4 < 0$ och $x^2+6x+4 = -4$
dvs $x^2+6x+8 = 0$, dvs $x = -3 \pm \sqrt{1}$
$x=-4$ eller $x=-2$

VGV

Så $f(x) \leq 4$ för $x \in [-6,-4] \cup [-2,0]$

$\underline{G-3}$ $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

Testa enkla värde för x

$x=0$ ger -6 , $x=1$ ger $0 = 1-6+11-6$

så $(x-1)$ delar $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

Vi utför polynomdivision

$$
\begin{array}{l}
\quad\quad x^2 - 5x + 6 \\
x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \;\big|\; \underline{x-1} \\
\underline{-(x^3 - x^2)} \\
\quad 0 - 5x^2 + 11x \\
\quad \underline{-(-5x^2 + 5x)} \\
\quad\quad 0 \quad 6x - 6 \\
\quad\quad \underline{-(6x - 6)} \\
\quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

så $P(x) = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$

sedan kan man se att summan av de två andra nollställen är 5 och produkten 6 och då gissa $x=2$ och $x=3$ som nollställe, eller använda pq-formeln

så $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$

och nollställena är $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

G-4

En diofantisk ekvation

utan lösningar, ex $3x + 3y = 1$

(3 delar vänsterledet men ej högerledet).

med lösningar, ex $x + y = 1$

~~en lösning~~: $(x_0, y_0) = (0, 1)$

alla lösningar är av formen $(n, 1-n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

G-5 Låt $z = a + ib$ vara ett komplext tal.

per definition har vi $\bar{z} = a - ib$

Låt $z' = a' + ib'$, med då $\overline{z'} = a' - ib'$

vi vill visa först att $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \overline{z'}$

vi räknar $z \cdot z' = aa' - bb' + i(ab' + a'b)$

så $\overline{z \cdot z'} = aa' - bb' - i(ab' + a'b)$

och $\bar{z} \cdot \overline{z'} = (a - ib)(a' - ib')$

$= aa' - bb' - i(ba' + ab')$

så vi ser att $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \overline{z'}$

Nu till absolutbelopp. per definition är $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

så $|z \cdot z'| = \sqrt{(z \cdot z') \cdot \overline{z z'}}$

$= \sqrt{z \cdot z' \cdot \bar{z} \cdot \overline{z'}}$ enligt ovan

$= \sqrt{z \cdot \bar{z} \cdot z' \cdot \overline{z'}}$ enligt kommutativa lagen

$= \sqrt{z \cdot \bar{z}} \cdot \sqrt{z' \cdot \overline{z'}}$ enligt potenslagarna

$= |z| \cdot |z'|$

V.S.B.

VG-1 | Ett positivt rationellt tal är ett tal som kan skrivas som bråk av naturliga tal.

$$\sqrt{\frac{m}{n}} = \sqrt{\frac{nm}{n^2}} = \frac{\sqrt{nm}}{n}$$

så om $\sqrt{\frac{m}{n}}$ vore rationellt, säg $\sqrt{\frac{m}{n}} = \frac{a}{b}$

så skulle även $\sqrt{nm}$ vara det $\sqrt{nm} = \frac{a}{bn}$

därför är $\sqrt{\frac{m}{n}}$ irrationell om $\sqrt{nm}$ är det.

Nu till $\sqrt{n} + \sqrt{m}$. Om det vore rationellt så vore även dess kvadrat vara det, säg

$$\frac{c}{d} = (\sqrt{n} + \sqrt{m})^2 = n + m + 2\sqrt{nm}$$

I så fall skulle $\sqrt{nm} = \left(\frac{c}{d} - n - m\right)/2$

$$= \frac{c - dn - dm}{2d}$$

vara rationellt, så $\sqrt{n} + \sqrt{m}$ är irrationellt

VG-2 Låt $f_a(x) = \dfrac{x}{x-a}$ med a en parameter $a>0$

x en variabel, $x>a$

dvs $D_{f_a} =]a, \infty[$

OBS! Eftersom $x > a > 0$, så är $f_a(x) > 0$

Dessutom $x > a \Rightarrow x - a < x$ så $f_a(x) > 1$

(med $\lim_{x\to\infty} f_a(x) = +\infty$

Vi studerar $f_a^{-1}(y) =$ den inversa funktionen

lös för variabeln x:

$$y = \frac{x}{x-a} \iff xy - ay = x$$

$$\iff xy - x = ay$$

$$\iff x(y-1) = ay$$

$$\iff x = \frac{ay}{y-1} \quad (\text{OBS! } y>1)$$

så $f_a^{-1}(y) = a{\cdot}y/y-1$

och låter $g_a(x) = \dfrac{ax}{x-1}$ vara den inversa

funktionen (som funktion av x).

OBS! När $a=1$ är $f_a = g_a = \dfrac{x}{x-1} = \dfrac{x-1+1}{x-1} = 1 + \dfrac{1}{x-1}$

så f_1 och dess invers sammanfaller för alla

x i $D_{f_1} =]1, \infty[$.

När $a \neq 1$ söker vi x med $f_a(x) = g_a(x)$: skärningspunkter

mellan graferna. Dvs $\dfrac{x}{x-a} = \dfrac{ax}{x-1}$

men $\dfrac{x}{x-a} = \dfrac{ax}{x-1} \iff \dfrac{1}{x-a} = \dfrac{a}{x-1}$ $\left(\begin{array}{c}\text{OBS!}\\ x \neq 0\end{array}\right)$

$$\iff x-1 = a(x-a)$$
$$\iff x-ax = 1-a^2$$
$$\iff x(1-a) = 1-a^2$$
$$\iff x = \frac{1-a^2}{1-a} = 1+a$$

Så graferna för f_a och f_a^{-1} skär varandra

för $x = 1+a$, dvs i punkten $(1+a, 1+a)$.