Aritmetik och Algebra

LGMA10/LGMA10 2016-03-11

Lösningsförslag.

P1 $\mathrm{I} = 1, 60, 3600$

$< = 10, 600, 36\,000$.

$2016 = 3 \times 600 + 216$

$= 3 \times 600 + 3 \times 60 + 36$

$= < \;<< \;\mathrm{III}\; <<< \;\mathrm{III\,III}$

P2 Utför division:

$$\begin{array}{l} \quad 2503{,}0909\ldots \\ 27534 \;\underline{|11} \\ -22 \\ \;\;55 \\ \;-55 \\ \;\;\;0034 \\ \;\;\;\;\;33 \\ \;\;\;\;\;\;100 \\ \;\;\;\;\;-99 \\ \;\;\;\;\;\;\;01 \end{array}$$

så $\dfrac{27534}{11} = 2503{,}\overline{09}$

P3 Vi räknar modulo 10:

$38^{13} \equiv 8^{13}$

Studerar potenser av 8: $8^2 \equiv 4 \mod 10$

$8^3 \equiv 32 \equiv 2 \mod 10$

$8^4 \equiv 6 \mod 10$ $\quad 8^5 \equiv 48 \equiv 8 \mod 10$

så $8^{13} \equiv (8^5)^2 \cdot 8^3 \equiv 8^2 \cdot 2 \equiv 8 \mod 10$

Så entalssiffran i 38^{13} är 8.

P-4 : $P(x) = 5x^3 - 135$

$$= 5\left(x^3 - 27\right)$$

$$= 5\left(x-3\right)\left(x^2 + 3x + 9\right)$$

Anonym kod	Tentamen LGMA10/L9MA10 V15 2015-08-21	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall svar anges på anvisad plats

(a) Ge exempel på (2p)

i. Ett polynom som är reducibelt över $\mathbb{Q}$, med rationella nollställe.
ii. Ett polynom som är reducibelt över $\mathbb{Q}$ men har bara icke-reella nollställe.
iii. Ett polynom som är irreducibelt över $\mathbb{Q}$ men reducibelt över $\mathbb{R}$.
iv. Ett polynom som är irreducibelt över både $\mathbb{Q}$ och $\mathbb{R}$.

Lösning:

exempelvis: i. $x^2-4=(x-2)(x+2)$

ii. $x^4+2x^2+1=(x^2+1)^2$

iii. $x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

iv. x^2+1

(b) Visa med hjälp av en sanningstabell att $A \Rightarrow B$ inte är ekvivalent med $\neg A \Rightarrow \neg B$. (2p)

Lösning:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A \Rightarrow \neg B$
S	S	S	S
S	F	F	S
F	S	S	F
F	F	S	S

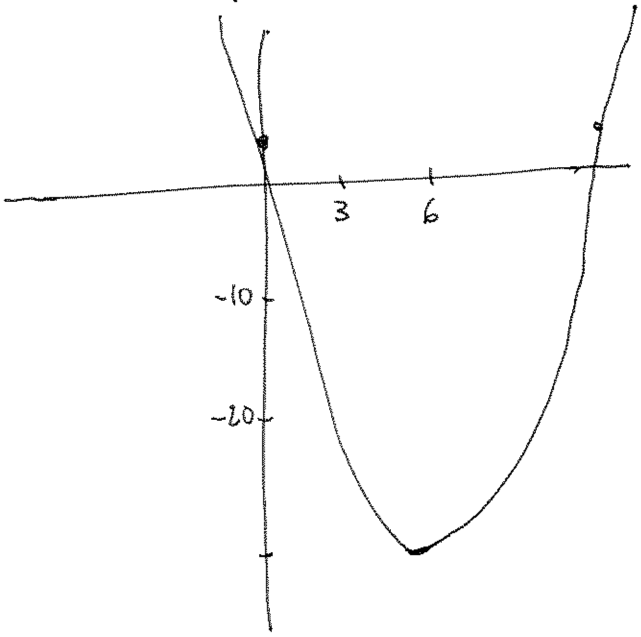
sanningsvärde är olika

(c) Skissa grafen för funktionen $f(x) = x^2 - 12x + 5$ med hjälp av kvadratkomplettering. (2p)

Lösning: $f(x) = (x-6)^2 - 36 + 5 = (x-6)^2 - 31$

jag skissar en parabel med min vid punkten $(6, -31)$

$f(0) = 5 = f(12)$



G-2 : 2 (a) $S = 1 + 3 + 5 + \dots + 17 + 19 = \sum_{k=1}^{10} (2k-1)$

(b) $S = 100$ (fås genom räkning eller som aritmetisk summa: $10 \cdot \frac{(19+1)}{2}$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

(c) Induktionsbevis för

$P(n) : \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$, gäller $\forall n \in \mathbb{N}$

<u>Basfall</u> $n = 1$: $\sum_{k=1}^{1} 2k-1 = 2-1 = 1 = 1^2$.

$n = 2$: $1+3 = 4 = 2^2$

<u>Induktionsantagande</u> Anta att det finns ett tal t där $\sum_{k=1}^{t} (2k-1) = t^2$

<u>Induktionssteg</u> Vi vill visa, med antagandet ovan, att $\sum_{k=1}^{t+1} (2k-1) = (t+1)^2$

$$\sum_{k=1}^{t+1} (2k-1) = \sum_{k=1}^{t} (2k-1) + 2(t+1) - 1$$

$$= t^2 + 2t + 1 \quad \text{enligt antagande}$$

$$= (t+1)^2$$

<u>Slutsats</u> så $\forall n$: $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$.

G-3. SGD$(7,5) = 1$, vi vill hitta alla lösningar till $7x-5y=11$

man kan gissa en relation $3 \cdot \underline{7} - 4 \cdot \underline{5} = \underline{1}$

eller gissa en lösning till vår ekvation

direkt: $3 \cdot 7 - 2 \cdot 5 = 11$

ger lösningen $(x_0, y_0) = (3, 2)$

så det finns oändligt många lösningar:

alla $(3+5n, 2+7n)$ för $n \in \mathbb{Z}$

(ex för $n=1$ $(8,9)$ ger $8 \cdot 7 - 5 \cdot 9$
$= 56 - 45 = 11$.)

Utan att gissa kan man använda Euklides algoritm för koefficienterna 5 & 7.

$$7 = 5 \cdot 1 + 2$$
$$5 = 2 \cdot 2 + 1$$

så $1 = \text{SGD}(7,5) = 5 - 2 \cdot 2$
$= 5 - 2 \cdot (7-5)$
$= 5 \cdot 3 - 7 \cdot 2$
$= 7 \cdot (-2) - 5 \cdot (-3)$

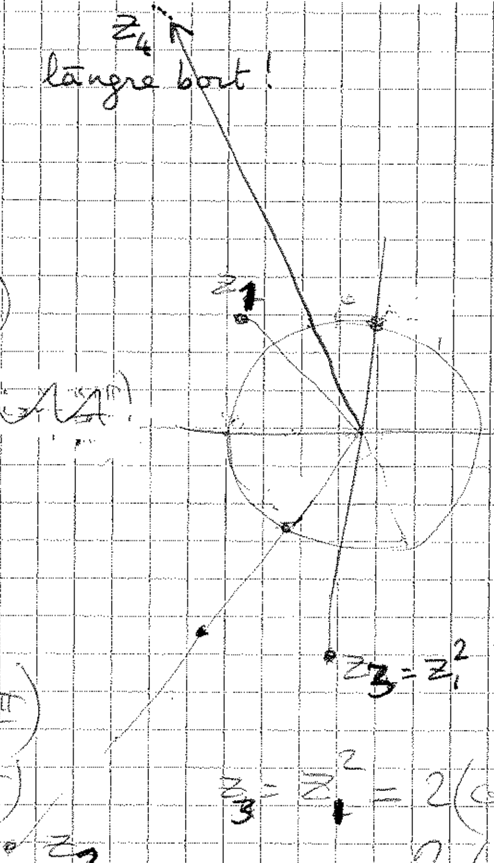
multiplikation med 11 ger en lösning

till vår ekvation $(x, y) = (-22, -33)$

som motsvarar lösningen med $n = -5$ ovan.

(5-4)

$$z_1 = -1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4}\right)$$



$$z_2 = -2 - i\cdot 2\sqrt{3} = 4\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = 4\left(\cos\frac{-2\pi}{3} + i\sin\frac{-2\pi}{3}\right)$$

$$z_4 = z_2^2 = 16\left(\cos\frac{-4\pi}{3} + i\sin\frac{-4\pi}{3}\right) = 16\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$z_3 = z_1^2 = 2\left(\cos\frac{6\pi}{4} + i\sin\frac{6\pi}{4}\right) = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

(5-5) Skriv n i 10-bas, med siffror $n_k n_{k-1} \dots n_2 n_1 n_0$

$$n = n_0 + 10n_1 + 100n_2 + \dots + 10^{k-1}n_{k-1} + 10^k n_k$$

och räkna modulo 3: $10 \equiv 100 \equiv \dots \equiv 10^k \equiv 1 \mod 3$

Så $n \equiv n_0 + n_1 + n_2 + \dots + n_{k-1} + n_k \pmod 3$

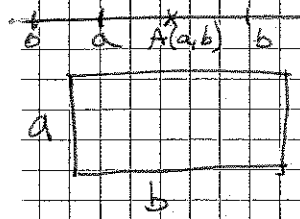
dvs $n \equiv$ siffersumman(n) $\pmod 3$

speciellt så är $n \equiv 0 \pmod 3 \iff$ siff$(n) \equiv 0 \mod 3$

VG - fråga.

$a, b \in \mathbb{R}^+$ $\qquad A(a,b) = \dfrac{a+b}{2}$

aritmetiskt medelvärde



geometriskt medelvärde $G(a,b) = \sqrt{a \cdot b}$

harmoniskt medelvärde $H(a,b) = 2 \cdot \dfrac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$

a) om $a = b$, $A(a,a) = G(a,a) = H(a,a) = a$.

för $a = 1$, $b = 3$ $\qquad A(1,3) = 2$

$G(1,3) = \sqrt{3}$

$H(1,3) = 2 \cdot \dfrac{1}{1+\frac{1}{3}} = 2 \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{2}$

för $a = 1$, $b = 10$ $\qquad A(1,10) = 5,5$

$G(1,10) = \sqrt{10}$

$H(1,10) = 2 \cdot \dfrac{1}{1+\frac{1}{10}} = 2 \cdot \dfrac{10}{11} = \dfrac{20}{11}$

för $a = 2$, $b = 4$ $\qquad A(2,4) = 3$

$G(2,4) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$H(2,4) = 2 \cdot \dfrac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = 2 \cdot \dfrac{4}{3} = \dfrac{8}{3}$

b) Vi jämför $A(a,b)^2$ och $G(a,b)^2$. Båda är positivatal

$$A(a,b)^2 = \frac{(a+b)^2}{2} = \frac{a^2+2ab+b^2}{4}$$

$$G(a,b)^2 = ab$$

så $$A(a,b)^2 - G(a,b)^2 = \frac{a^2+2ab+b^2-4ab}{4}$$

$$= \frac{a^2-2ab+b^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{4}$$

som är en kvadrat, därmed alltid ≥ 0.

så $A(a,b) \geq G(a,b)$

c) likheten ovan gäller omm $A(a,b)^2 - G(a,b)^2 = 0$

dvs omm $(a-b)^2 = 0$, dvs omm $a = b$.

VG1 - d) I exemplen ovan är $H(a,b) \leq G(a,b) \leq A(a,b)$.

Vi räknar med $H(a,b) = \dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$

$$= \frac{2}{\frac{a+b}{ab}}$$

$$= 2 \cdot \frac{ab}{a+b}$$

$$= \frac{G(a,b)^2}{A(a,b)}$$

$$= G(a,b) \cdot \frac{G(a,b)}{A(a,b)}$$

men vi såg i b att $G(a,b) \leq A(a,b)$

så $\dfrac{G(a,b)}{A(a,b)} \leq 1$ och $H(a,b) \leq G(a,b)$

med likhet omm $a = b$.

För mer om dessa medelvärde, sök

arithmetic geometric harmonic mean

på Internet!

VG2 : $P = \left\{ n \in \mathbb{N} : a, b \in \mathbb{N} \quad a \cdot b = n \Rightarrow (a = 1 \wedge b = n) \vee (a = n \wedge b = 1) \right\}$

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists r \in \mathbb{N}, \exists p_1, p_2, \ldots, p_r \in P, \exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}:$

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$$

$$\wedge \quad n = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_s^{\beta_s}, \; q_i \in P \Rightarrow \{q_1, \ldots, q_s\} = \{p_1, \ldots, p_r\}$$

$$\wedge \{\beta_1, \ldots, \beta_s\} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\} \ldots$$