**MATEMATIK, Göteborgs universitet**

# Tentamen Aritmetik och algebra 7,5hp
# LGMA10, L9MA10, VT16, Laura Fainsilber

**2016-03-11, kl.08.30–12.30**

Hjälpmedel: inga hjälpmedel. Telefonvakt: Laura Fainsilber, tel.x5325

Förklara hur du resonerar och räknar. Poäng ges inte för bara svaren, utan för kvalité och förklaring av lösningarna.

Du som är godkänd på minst 6 av 7 veckouppgifter vårterminen 16 behöver inte svara på den preliminära delen och behöver 15p från G-delen för att bli godkänd. Du som är godkänd på 4 eller 5 veckouppgifter vårterminen 16 behöver minst 15p från G-delen och totalt 18p från preliminärdelen och G-delen. Du som är godkänd på färre än 4 veckouppgifter vårterminen 16 behöver minst 15p från G-delen och totalt 20p från preliminärdelen och G-delen.

För betyget VG krävs godkänd och 22p från G-delen och VG-delen.

- **Preliminär del:** (8p)

  1. Det Babylonska talsystemet var ett positionssystem med bas 60 som använder två symboler som kunde pressas i lera med en kil. Symbolen för 1:an liknar en spik och 10:an en vinge. Skriv talet 2016 i detta system. (2p)
  2. Skriv talet $\frac{27534}{11}$ i decimalform. (2p)
  3. Vad är entalssiffran i talet $38^{13}$? (2p)
  4. Faktorisera polynomet $P(x) = 5x^3 - 135$ så långt det går med reella koefficienter. (2p)

- **Frågor för betyget G (och VG):** (20p)

  1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Bladet lämnas in tillsammans med övriga lösningar. (6p)
  2. (a) Skriv summan $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19$ med hjälp av summatecknet $\sum$. (5p)
     (b) Beräkna summan och ange en formel för summor som följer samma mönster men har olika antal termer.
     (c) Bevisa med induktion att din formel stämmer.
  3. Lös den diofantiska ekvationen $7x - 5y = 11$ (3p)
  4. Skriv följande komplexa tal i polär form och placera var och en i det komplexa talplanet. (2p)
     (a) $z_1 = -1 + i$
     (b) $z_2 = -2 - i \cdot 2\sqrt{3}$
     (c) $z_3 = z_1^2$
     (d) $z_4 = z_2^2$
  5. Bevisa att ett naturligt tal $n$ är delbart med 3 om och endast om talets siffersumma är delbart med 3. (4p)

V.G. Vänd för VG-frågor!

- **Frågor för betyget VG:** (10p)

1. **Olika begrepp för medelvärde** (7p)

   Låt $a$ och $b$ vara två positiva reella tal. Vi definierar tre olika medelvärde:
   Det aritmetiska medelvärdet: $A(a, b) = \frac{a+b}{2}$
   Det geometriska medelvärdet: $G(a, b) = \sqrt{a \cdot b}$ kan illustreras med hjälp av arean av en rektangel med sidor $a$ och $b$.
   Det harmoniska medelvärdet: $H(a, b) = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ kan illustreras med medelhastighet för en resa där en del körs med hastighet $a$ och en del med hastighet $b$.

   (a) Undersök alla tre medelvärden med några exempel för $a$ och $b$.
   (b) Visa att $A(a, b) \geq G(a, b)$ för alla positiva tal $a$ och $b$.
   (c) För vilka tal $a$ och $b$ gäller att $A(a, b) = G(a, b)$?
   (d) Kan du ange olikheter för hur det harmoniska medelvärdet relateras till det aritmetiska och det geometriska? Kan du bevisa dessa?

2. Uttryck aritmetikens fundamentalsats med hjälp av logiska symboler (3p)

| Anonym kod | Tentamen LGMA10/L9MA10 V15 2015-08-21 | sid.nummer 1 | Poäng |
|---|---|---|---|
| | | | |

1. Till nedanstående uppgifter skall svar anges på anvisad plats

   (a) Ge exempel på (2p)

   i. Ett polynom som är reducibelt över $\mathbb{Q}$, med rationella nollställe.
   ii. Ett polynom som är reducibelt över $\mathbb{Q}$ men har bara icke-reella nollställe.
   iii. Ett polynom som är irreducibelt över $\mathbb{Q}$ men reducibelt över $\mathbb{R}$.
   iv. Ett polynom som är irreducibelt över både $\mathbb{Q}$ och $\mathbb{R}$.

   **Lösning:**

   ...................................................................................

   (b) Visa med hjälp av en sanningstabell att $A \Rightarrow B$ inte är ekvivalent med $\neg A \Rightarrow \neg B$. (2p)

   **Lösning:**

   ...................................................................................

   (c) Skissa grafen för funktionen $f(x) = x^2 - 12x + 5$ med hjälp av kvadratkomplettering. (2p)

   **Lösning:**